Furnas Centrais Elétricas S.A. · Laboratório de Concreto de Itumbiara

Relaxation in Concrete

Edição revista, com regeneração das curvas e notas de revisão técnica

AUTORES DO ARTIGO ORIGINAL

Eng. Walton Pacelli de Andrade
Eng. J. T. Bastos
Eng. Q. M. Guedes
Eng. V. Souza Lima

EDIÇÃO, RECONSTITUIÇÃO E CÁLCULOS

Flávio Mamede Pereira Gomes
Instituto Roy Carlson

O artigo original compara três processos de obtenção da relaxação a partir da fluência — solução da equação integral, logaritmo médio e processo de Carlson — com exemplos dos concretos de Angra, Tucuruí e Itumbiara. Esta edição transcreve o texto inglês, normaliza a notação, regenera as Figuras 1 a 9 e reúne, ao final, notas de revisão técnica. É o companheiro do relatório *Determinação da Fluência do Concreto* (edição revista).

setembro de 2026

Nota desta edição

O artigo *Relaxation in Concrete* circulou como cópia datilografada, digitalizada em dezessete páginas (`fotos/artigo-livro-verde/escaner/`). As duas primeiras páginas do artigo — provavelmente capa ou resumo — não constam da digitalização; a numeração impressa começa em 5 na terceira imagem. Esta edição reconstrói o documento a partir das páginas 3 a 11 (texto) e substitui as páginas 12 a 19 (Figuras 1 a 9) por figuras regeneradas.

O texto inglês dos autores foi preservado. Corrigem-se apenas erros evidentes de datilografia. Nesta edição, a função de fluência e a função de relaxação denotam-se J e R (maiúsculas), como é usual na literatura; o original datilografado usava f e r. A máquina de escrever não dispunha dos símbolos gregos necessários; a tabela abaixo registra as demais leituras adotadas — a principal fonte de ambiguidade do documento.

Tabela 1 – Correspondência entre a notação datilografada e a leitura desta edição.

No original	Leitura adotada	Justificativa
$\tau(\tau)$, τ_0, $\mathrm{d}\tau$ no integrando	$\sigma(\tau)$, σ_0, $\mathrm{d}\sigma$	A mesma tecla τ serve para tensão e idade; a eq. (1) é a superposição de Boltzmann em $\mathrm{d}\sigma$
ε com limites $i = 1 \ldots n$	$\sum_{i=1}^{n}$	Não havia Σ; o ε de deformação aparece só em $\varepsilon(t)$
$\nabla\tau_i$, $\Delta\tau_n$	$\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_n$	Incremento de tensão; o próprio texto alterna ∇ e Δ
ℓn	$\ln$	Logaritmo neperiano, como o texto declara
J_{oo}, $J_{\bar{o}\bar{o}}$	$J_{00} = J(\tau_0, 0) = 1/E_0$	Dois índices zero, não infinito; ver Nota T1
$\div$	fração	Convenção da época
$t \succcurlyeq \tau$	$t \geq \tau$	Tecla disponível

As notas editoriais que esclarecem um ponto local — notação, rodapé ausente, numeração das equações, unidades das tabelas, composição do Apêndice I, referências — estão em rodapé na página em que ocorrem. As notas de revisão técnica (mecânica, viscoelasticidade com envelhecimento e concreto massa) estão reunidas ao final, com remissão cruzada no corpo.

As Figuras 1 e 2 foram refeitas em TikZ a partir dos esquemas do original. As Figuras 3 a 9 foram regeneradas pelo script `relaxation_processes.py`, com os coeficientes das Tabelas I e II e a malha de tempo da Seção 7; a elas sobrepõe-se o Processo IV (η_n, q_n; Nota T11). A coincidência I–III com a leitura do original está na Nota T7.

Este artigo e o relatório *Determinação da Fluência do Concreto* são trabalhos do mesmo laboratório e compartilham dosagens (ANG 103, 140.6.1, TUC 192) e o modelo USBR $1/E + F\ln(1+t)$. Cada um se basta; nenhum antecipa trabalhos posteriores.

Sumário

Nota desta edição ii

Lista de Tabelas iv

Lista de Figuras v

I O artigo original 1

1 Introduction 2

2 Definitions and Notations 3

3 Obtaining the Relaxation Curve through the Solution of the Integral Equation 4

4 Obtaining the Relaxation Curve through Carlson's Process 7

5 Verifying the Relaxation Curves 10

6 Characterization of the Creep Function 11

7 Relaxation Curves 13

8 Conclusions 21

A Characterization of concrete mixes 22

B References of the original paper 24

Notas de revisão técnica 25

Lista de Tabelas

1 Correspondência entre a notação datilografada e a leitura desta edição. ii

2 Characterization of model $E(\tau)$ (unit: kgf/cm^2). 11
3 Characterization of model $F(\tau)$ (unit: cm^2/kgf). 12

4 Appendix I — mix proportions and properties. 22

5 Tensão remanescente (kgf/cm^2) e deformação normalizada aos 90 dias — replicação desta edição. 27

Lista de Figuras

1 Histórico de tensão em degraus sob deformação prescrita (Processo I). O incremento $\Delta\sigma_n$ aplica-se em t_n; a tensão remanescente em t_n^+ é $\sigma_n = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$. . . . 5

2 Hipótese de paralelismo de Dischinger: a diferença entre as duas curvas de fluência seria constante para todo $t_n \geq \tau_i$. Sob o modelo (7), essa diferença não é constante. 5

3 Tucuruí, $\tau_0 = 7$ d — processos I–IV (acima) e deformação durante a relaxação (abaixo). Regenerada a partir das Tabelas 2 e 3; Processo IV pela formulação η_n, q_n (Nota T11). 14

4 Tucuruí, $\tau_0 = 28$ d. 15

5 Tucuruí, $\tau_0 = 180$ d. 16

6 Itumbiara, $\tau_0 = 3$ d. 17

7 Itumbiara, $\tau_0 = 7$ d. 18

8 Angra dos Reis, $\tau_0 = 14$ d. 19

9 Angra dos Reis, $\tau_0 = 28$ d. 20

Parte I

O artigo original

1 Introduction

Since it is very difficult to obtain concrete relaxation curves by experimental processes, they are usually calculated through numerical methods, using creep curves as a starting point. For mass concrete — the subject matter of this paper — creep tests are run, as a routine, in the laboratories installed at large dam construction sites.

Once the relaxation curves of a given mass concrete are obtained, it is possible to solve the following problems:

- how to predict stress fields in the structures, taking into consideration the aging of concrete and its viscoelastic behaviour;
- how to obtain stresses from strains measured by embedded strain meters.

Both of these questions present an interest for design, construction, and monitoring of concrete dams.

The main purpose of this paper is to compare the relaxation curves obtained through the process used by Carlson [1] — which will be referred to as "Carlson's process", from now on — with the relaxation curves obtained by solving the integral equation which expresses the relaxation phenomenon. The authors want to show that the application of Carlson's process demands that the creep phenomenon obey the hypothesis employed by Dischinger in his works on the same subject [2]. An alternative algorithm is presented, which, without using Dischinger's hypothesis, leads to more satisfactory results than those obtained by Carlson's process.

The examples herein were provided by concretes used in the construction of the Angra dos Reis Nuclear Power Plant and the Hydroelectric Power Plants of Tucuruí and Itumbiara, in Brazil.

2 | Definitions and Notations

The definitions and notations adopted are those found in other publications on the same subject [3], [4], [5] and are presented below.

Creep is defined as the variation of strain with time under constant stress.

$J(\tau, t-\tau)$ indicates the creep function, that is, the function which represents the total strain (elastic strain plus viscous strain) at time t, caused by the unit stress applied at age τ $(t \geq \tau)$.

Relaxation is defined as the variation of stress with time under constant strain.

$R(\tau, t-\tau)$ indicates the relaxation function, that is, the function which represents the remaining stress at a given time t, caused by the unit strain imposed at age τ $(t \geq \tau)$.

$E(\tau)$ indicates the modulus of elasticity at age τ.

J_{ij} represents, in an abbreviated form, the value $J(\tau_i, t_j - \tau_i)$; in the particular case of $i = j$, one has $J_{ii} = E_i^{-1}$, with $E_i = E(\tau_i)$.

The notation $\sigma_0 = \sigma(\tau_0)$ and $F_0 = F(\tau_0)$ will also be used.[1]

[1] No original datilografado lê-se «$\tau_0 = \tau(\tau_0)$»: a mesma tecla servia para a tensão inicial e para a idade inicial. $F(\tau)$ é o coeficiente de fluência da eq. (7), o mesmo $F(k)$ do relatório *Determinação da Fluência do Concreto*; o símbolo é definido só na Seção 3, mas a notação F_0 é anunciada aqui.[T1]

3 | Obtaining the Relaxation Curve through the Solution of the Integral Equation

Consider a cylindrical test sample of concrete, axially submitted to a stress $\sigma(\tau)$, variable with time, starting at an initial value $\sigma(\tau_0)$. For stress levels corresponding to the working conditions of mass concrete structures, there hold valid:

- the hypothesis of creep linearity;
- the applicability of Boltzmann's superposition principle [3], [4].

Under these conditions, strain at a given time t is given by:

$$\varepsilon(t) = \sigma(\tau_0)\, J(\tau_0, t-\tau_0) + \int_{\tau_0^+}^{t} J(\tau, t-\tau)\, \mathrm{d}\sigma(\tau) \tag{1}$$

If, in the test being considered, $\varepsilon(t)$ is kept constant and equal to the initial elastic strain $\sigma(\tau_0)/E(\tau_0)$, supposed to be unitary, the relaxation will be obtained as defined in Item 2. The relaxation function will therefore be provided through the solution of the integral equation:[T2]

$$\frac{\sigma(\tau_0)}{E(\tau_0)} = \sigma(\tau_0)\, J(\tau_0, t-\tau_0) + \int_{\tau_0^+}^{t} J(\tau, t-\tau)\, \mathrm{d}\sigma(\tau) \tag{2}$$

This equation shows that knowledge of the family of creep functions $J(\tau, t-\tau)$, with $\tau \geq \tau_0$, is necessary for obtention of a certain relaxation curve $R(\tau_0, t-\tau_0)$. Since, as a rule, it is impossible to integrate analytically equation (2), its numerical solution is mandatory.

Using the notation introduced in Item 2, there comes:

$$\frac{\sigma_0}{E_0} = \sigma_0\, J_{0n} + \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i\, J_{in} \tag{3}$$

or

$$\frac{\sigma_0}{E_0} = \sigma_0\, J_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\, J_{in} + \Delta\sigma_n\, J_{nn} \tag{4}$$

Finally,

$$\Delta\sigma_n = E_n \left[\sigma_0 \left(J_{00} - J_{0n} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\, J_{in} \right] \tag{5}$$

The remaining stress, at time t_n^+, equals[1]

$$\sigma_n = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i \tag{6}$$

as it can be seen from Fig. 1.

[1] O asterisco após «equals» no original remete a um rodapé que não aparece na digitalização. Pelo contexto e pela Figura 1, t_n^+ é o instante imediatamente posterior à aplicação do incremento $\Delta\sigma_n$. Quanto a J_{00}: trata-se de $J(\tau_0, 0) = 1/E_0$ — dois índices zero, conforme $J_{ii} = E_i^{-1}$ do Item 2 — e não de um símbolo de infinito. A prova é a passagem de (4) a (5): substituindo $\sigma_0/E_0 = \sigma_0 J_{00}$ e $J_{nn} = 1/E_n$ e isolando $\Delta\sigma_n$, obtém-se exatamente (5). A página seguinte confirma: «$J_{00} - J_{0n} = -F_0 \ln(1 + t_n - \tau_0)$», verdadeira só se $J_{00} = 1/E_0$ na eq. (7).[T1]

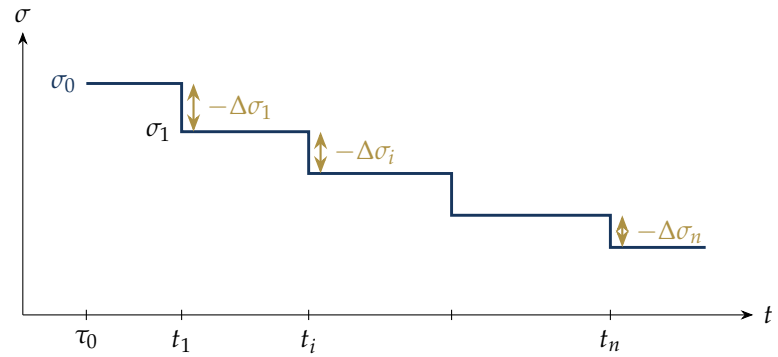

Figura 1 – Histórico de tensão em degraus sob deformação prescrita (Processo I). O incremento $\Delta\sigma_n$ aplica-se em t_n; a tensão remanescente em t_n^+ é $\sigma_n = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$.

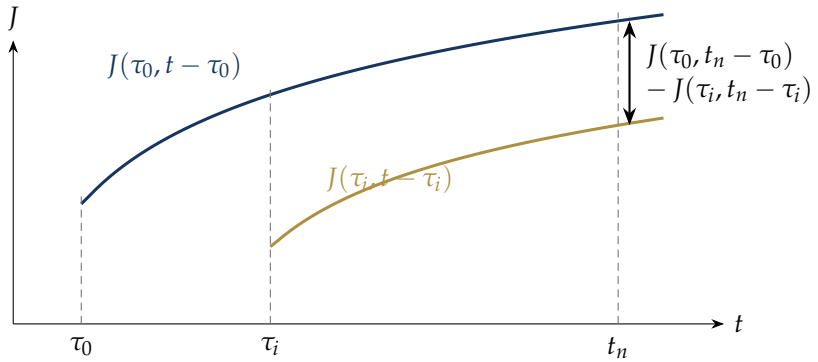

Figura 2 – Hipótese de paralelismo de Dischinger: a diferença entre as duas curvas de fluência seria constante para todo $t_n \geq \tau_i$. Sob o modelo (7), essa diferença não é constante.

Expression (5) is valid whatever the shape adopted for the creep function is.[T3]

In this paper, the model for the creep function suggested by Raphael [6] and adopted by the Bureau of Reclamation [7] has been used:

$$J(\tau, t-\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + F(\tau)\ \ln(1 + t - \tau) \tag{7}$$

where ln indicates the Naperian logarithm, and t and τ are measured in days.

Two calculation processes were adopted. In the first one, no additional simplification was introduced, and the values of $\Delta\sigma_n$ were calculated through equation (5), J_{in} and $(J_{00} - J_{0n})$ being replaced with:

$$J_{in} = \frac{1}{E_i} + F_i\ \ln(1 + t_n - \tau_i),$$
$$J_{00} - J_{0n} = -F_0\ \ln(1 + t_n - \tau_0).$$

In the second process, a simplification proposed by Jones [7] was introduced. This consists of calculating, in an approximate way, the summation

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\, J_{in} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta\sigma_i}{E_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\, F_i\ \ln(1 + t_n - \tau_i)$$

which appears in (5), using the mean value theorem [8], thus making:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\, F_i\ \ln(1 + t_n - \tau_i)\ \cong\ \ln(1 + t_n - \tau_n^*) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\, F_i \tag{8}$$

where τ_n^* is the arithmetic mean value:

$$\tau_n^* = \frac{\tau_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n+1}.$$

This second process, named *average logarithm process*, has the advantage of leading to an entirely recurring expression for calculating $\Delta\sigma_n$.[T4]

4 | Obtaining the Relaxation Curve through Carlson's Process

During the 30's, in his works on concrete creep, Dischinger [2] assumed the hypothesis of "parallelism" of creep curves. It is easy to show that the introduction of this hypothesis in the general expression (3) leads to the basic equation of Carlson's process [1] for calculating relaxation from creep curves.

The above statement may be demonstrated starting from the two curves in Fig. 2. The first of these curves represents the function $J(\tau_0, t-\tau_0)$. The second one represents the generic function $J(\tau_i, t-\tau_i)$ with $\tau_i > \tau_0$. As in Item 3, the relaxation curve which will be obtained is the curve $R(\tau_0, t-\tau_0)$, that is, the curve which corresponds to the application of unit strain at age τ_0.

If, by hypothesis, the two curves are "parallel", the difference $J(\tau_0, t_n-\tau_0) - J(\tau_i, t_n-\tau_i)$, shown in Fig. 2, will be constant for any time $t_n \geq \tau_i$ (in this case, it suffices to know the first curve and the initial value $J(\tau_i, 0) = E_i^{-1}$ of the second one in order to know the latter curve completely).

It is therefore possible to write the following equation, taking into consideration times t_{n-1} and t_n, and employing the notation introduced in Item 2 and used in Item 3:

$$J_{0n} - J_{in} = J_{0,n-1} - J_{i,n-1} \tag{9}$$

which may assume a more convenient form for the demonstration:

$$J_{0n} - J_{0,n-1} = J_{in} - J_{i,n-1} \tag{10}$$

Equation (3) should now be applied. By taking into consideration times t_{n-1} and t_n, one after the other, it will be obtained:

$$\frac{\sigma_0}{E_0} = \sigma_0 J_{0,n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i J_{i,n-1} \tag{11}$$

$$\frac{\sigma_0}{E_0} = \sigma_0 J_{0n} + \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i J_{in} \tag{12}$$

or else, by subtracting (11) from (12):

$$\sigma_0 \left(J_{0n} - J_{0,n-1}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i \left(J_{in} - J_{i,n-1}\right) + \Delta\sigma_n J_{nn} = 0 \tag{13}$$

By introducing (10) into (13), there accrues:

$$\left(\sigma_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i\right) \left(J_{0n} - J_{0,n-1}\right) + \Delta\sigma_n J_{nn} = 0 \tag{14}$$

Bearing in mind that $J_{nn} = E_n^{-1}$ and

$$\sigma_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\sigma_i = \sigma_{n-1},$$

there comes, finally:

$$\Delta\sigma_n = -E_n\,\sigma_{n-1}\big(J_{0n} - J_{0,n-1}\big) \tag{15}$$

There only remains to be demonstrated the equivalence between (15) and the basic equation of Carlson's process. To show this equivalence it is useful to follow the explanation given by Carlson himself in [1]:

> *Relaxation can be computed from creep data quite simply if the creep is considered to occur in small steps. By definition, the stress needed to offset the creep during each such step is the relaxation during that step. Consider, for example, the first day after a stress is applied. If the creep were to be prevented to meet the condition of no strain, an offsetting stress must be applied which is numerically equal to the creep strain multiplied by modulus of elasticity at that age. In general, the method is simply to multiply the creep strain for the interval by the modulus of elasticity at that age. However, it must be borne in mind that the relaxation causes a reduction in stress at each successive interval, so the creep must be reduced as the stress is reduced. Thus, for each step, there are three numbers to multiply together: (1) the creep for the interval (assuming no relaxation), (2) the percentage stress remaining, so as to correct the creep to a lower value, and (3) the modulus of elasticity at the age under consideration.*

The numerical example which Carlson uses as an illustration of the above explanation shows clearly that the creep for the interval (the first of the three numbers to be multiplied together) equals $\sigma_0\,\Delta J$ (ΔJ represents the increment of $J(\tau_0, t-\tau_0)$ in the interval being considered). Using the notation adopted in this paper, there comes, for the interval defined by t_{n-1} and t_n:

$$\Delta J = J_{0n} - J_{0,n-1}.$$

Therefore, the creep for the interval equals $\sigma_0\big(J_{0n} - J_{0,n-1}\big)$. The second number to which Carlson refers (the percentage stress remaining) is, in this case, σ_{n-1}/σ_0. The third number (the modulus of elasticity at the age under consideration) is E_n. The product is, therefore:

$$\sigma_0\big(J_{0n} - J_{0,n-1}\big)\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_0}\,E_n = \big(J_{0n} - J_{0,n-1}\big)\sigma_{n-1}\,E_n \tag{16}$$

which must be equal to the offsetting stress, that is, to the increment $\Delta\sigma_n$ to the stress σ_{n-1} (this increment will be taken with a negative sign, since there is a decrease in stress).

There results:[1]

$$\big(J_{0n} - J_{0,n-1}\big)\sigma_{n-1}\,E_n = -\Delta\sigma_n \tag{17}$$

which is equation (15).

The authors' statement on Carlson's process is thus proved: by introducing Dischinger's hypothesis in general equation (3), the fundamental equation (15) will be obtained.[T5] This simplification allows, in Carlson's process, to determine the relaxation function $R(\tau_0, t-\tau_0)$ using only the function $J(\tau_0, t-\tau_0)$ plus the law of variation of the elasticity modulus with the concrete age, while in the general process, for the determination of $R(\tau_0, t-\tau_0)$, it is necessary to know the whole family of functions $J(\tau, t-\tau)$ with $\tau \geq \tau_0$.

However, the accuracy of Carlson's process may not be satisfactory in certain cases, as, for example, in the numerical applications which illustrate this paper.[T6]

Closing Item 4, it should be noticed that equation (15), combined with

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \Delta\sigma_n \tag{18}$$

[1] O original salta de (16) para (18); a expressão abaixo, não numerada, ocupa o lugar da (17). No original o sinal negativo desta última igualdade está implícito na frase anterior («taken with a negative sign»); foi explicitado aqui para que ela coincida literalmente com (15).

allows one to write

$$\sigma_n = \sigma_{n-1}\left[1 - E_n\left(J_{0n} - J_{0,n-1}\right)\right] \tag{19}$$

In the numerical examples of this paper, equation (19) was used with:

$$J_{0n} - J_{0,n-1} = F_0 \ln \frac{1 + t_n - \tau_0}{1 + t_{n-1} - \tau_0} \tag{20}$$

according to model (7) adopted for the creep function.

5 | Verifying the Relaxation Curves

The relaxation curves obtained either by the average logarithm process or by the Carlson process were verified by calculating the error in strain, represented by its variation during relaxation (in an exact numerical process this variation should obviously be null). In order to calculate this variation of strain, the relaxation function (obtained through each of the above processes) was taken into the second member of expression (1). The result considered to be the best one was whichever adjusted more closely to the unit strain.

6 | Characterization of the Creep Function

The creep function will be entirely characterized when the functions $E(\tau)$ and $F(\tau)$ are known. These last functions are obtained as described below.

Laboratories existing at large dam construction sites perform, as a routine, tests for determination of the concrete modulus of elasticity $E(\tau)$ and $F(\tau)$ for discrete values of τ. The adjustment of regression models to these discrete values of the modulus of elasticity and of the creep coefficient allows characterization of the functions $E(\tau)$ and $F(\tau)$. The models initially adopted for $E(\tau)$ were as follows:

$$E_n(\tau) = \frac{\tau^n}{\sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}\,\tau^{i-1}} \qquad n = \{1,2,3\} \tag{21}$$

$$E_4(\tau) = a_0 \exp\left(-a_1/\tau\right) \tag{22}$$

in which τ indicates the age of the concrete measured in days. The model which presented the highest value for the correlation coefficient was chosen for each concrete. When the choice fell on model (21), the element of this family presenting a positive root in its denominator was excluded.

The models adopted for the creep coefficients are the following ones:

$$F(\tau) = a_1 + a_0/\tau \tag{23}$$

$$F(\tau) = a_0 \exp\left(a_1/\tau\right) \tag{24}$$

In each case, the model presenting the highest value for the correlation coefficient was chosen.[T8]

Tables 2 and 3, below, present functions $E(\tau)$ and $F(\tau)$ corresponding to the concretes used in the construction of the Angra dos Reis Nuclear Power Plant and the Hydroelectric Power Plants of Tucuruí and Itumbiara, in Brazil, which were taken as examples for this paper.

Tabela 2 – Characterization of model $E(\tau)$ (unit: kgf/cm^2).

Concrete	$10^6\,a_0$	$10^6\,a_1$	Model (21)	Ages (days)*	Correl.
Angra	11.562	4.123	$n = 1$	7; 28; 90; 180	0.966
Tucuruí	7.054	2.562	$n = 1$	7; 28; 60; 90; 180; 365	0.996
Itumbiara	7.750	3.619	$n = 1$	3; 7; 28; 90	0.993

Com $n = 1$, o modelo (21) é $E(\tau) = \tau/(a_0 + a_1\tau)$, ou seja $1/E(\tau) = a_1 + a_0/\tau$: a_1 tem unidade cm^2/kgf e é o inverso do módulo assintótico ($E_\infty = 1/a_1$: 242 500 kgf/cm^2 para Angra, 390 000 para Tucuruí, 276 000 para Itumbiara); a_0 tem unidade cm^2 dia/kgf. A coluna «Ages» apresenta as idades em que o módulo foi determinado.

Na Tabela 3, a_0 está em cm^2/kgf (multiplicado por 10^6) e a_1 em dias — por isso a coluna de a_1 não leva o fator 10^6, ao contrário do que o cabeçalho poderia sugerir. A coluna «Ages» apresenta as idades em que os ensaios de fluência foram iniciados.

Appendix A contains the characterization of concrete mixes.

Tabela 3 – Characterization of model $F(\tau)$ (unit: cm^2/kgf).

Concrete	$10^6\, a_0$	a_1	Adopted model	Ages (days)**	Correl.
Angra	0.546	3.258	Expr. (24)	3; 7; 28; 90	0.951
Tucuruí	0.708	1.983	Expr. (24)	3; 7; 28; 180; 365	0.944
Itumbiara	0.404	1.556	Expr. (24)	3; 7; 14; 28	0.945

7 | Relaxation Curves

Relaxation curves were calculated through processes I, II and III, which are:

- numerical solution of the integral equation;
- average logarithm;
- Carlson's.

In this edition a fourth curve is overlaid — Process IV — obtained from the same creep function by the rate-type algorithm $(\eta_n,\, q_n)$ with an aging Kelvin chain (Nota T11). It coincides with Process I within discretization tolerance.

The authors adopted $\sigma_0 = 100$ kgf/cm^2, and the following discretization for the time variable:

- $\Delta t = 0.25$ days for $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + 30$ days;
- $\Delta t = 0.50$ days for $\tau_0 + 30$ days $< t \leq \tau_0 + 60$ days;
- $\Delta t = 1.00$ days for $\tau_0 + 60$ days $< t \leq \tau_0 + 90$ days.

Figures 3 through 9 present, for each value adopted for τ_0, the relaxation curves calculated through the three different processes, together with Process IV of this edition. They also present, for processes II and III, the variation of strain which occurred during relaxation, as per Item 5. For process I this variation is null; for process IV it remains of order 10^{-3}.[T7 T9 T11]

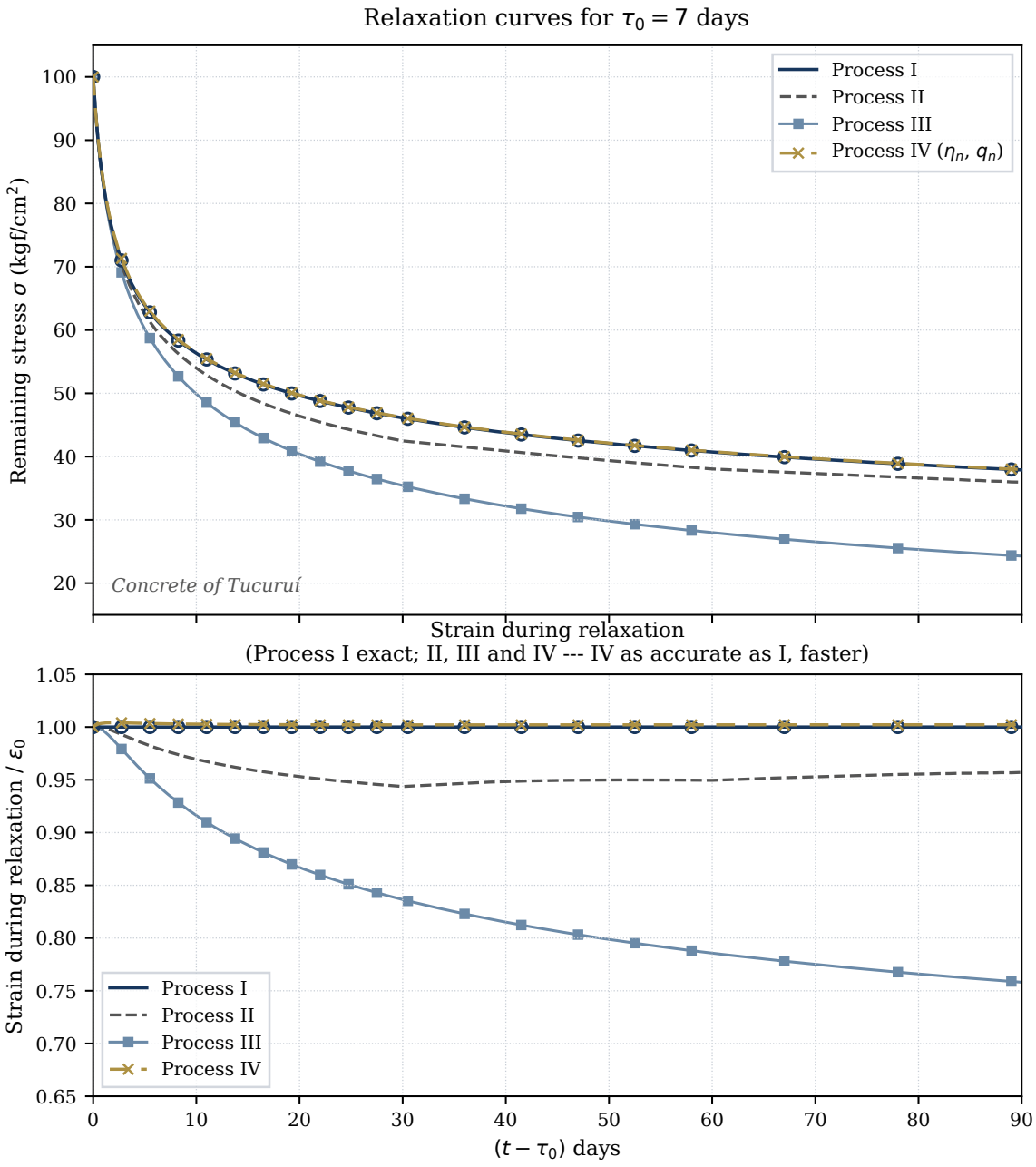

fig. 3

Figura 3 – Tucuruí, $\tau_0 = 7$ d — processos I–IV (acima) e deformação durante a relaxação (abaixo). Regenerada a partir das Tabelas 2 e 3; Processo IV pela formulação η_n, q_n (Nota T11).

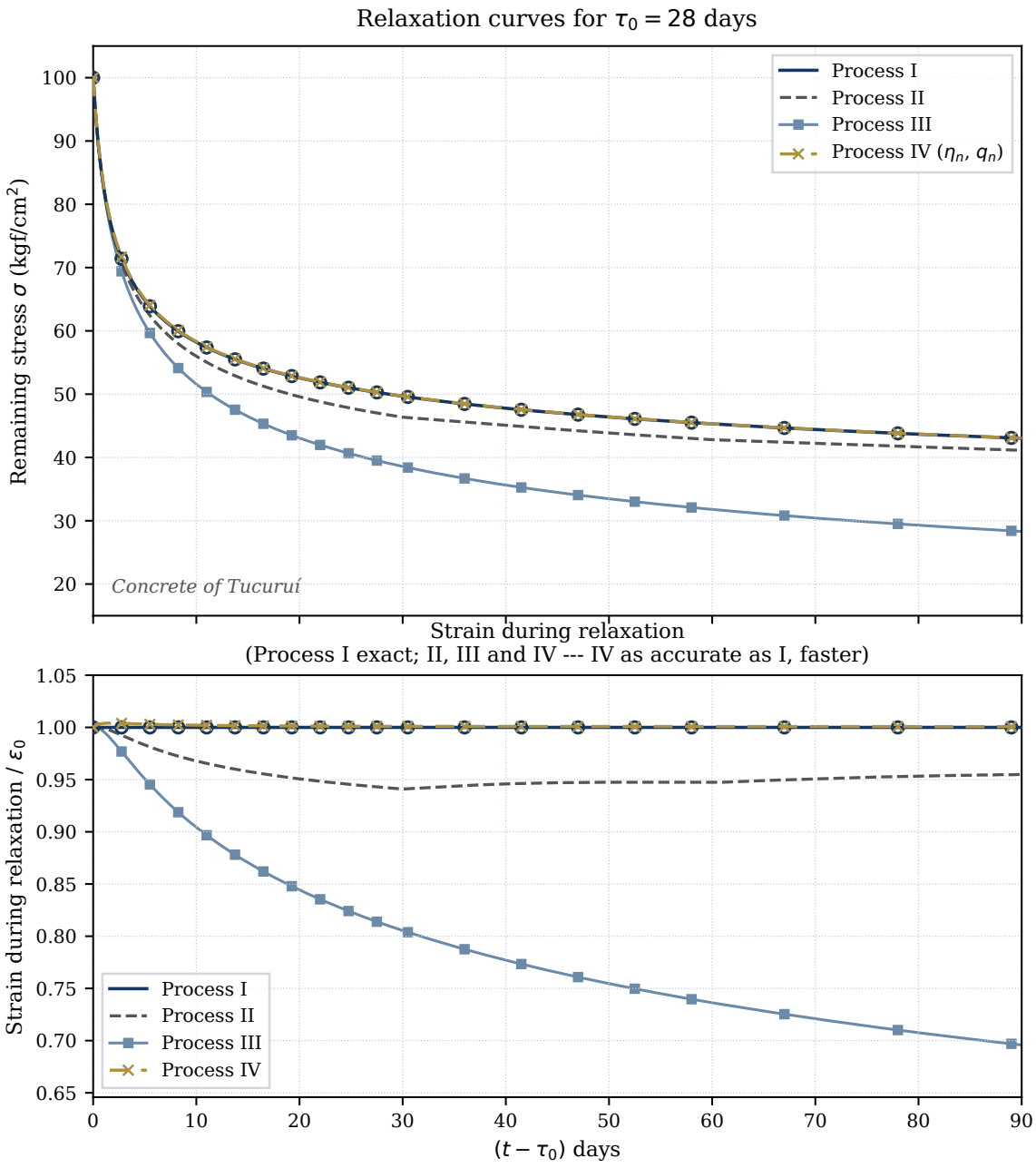

fig. 4

Figura 4 – Tucuruí, $\tau_0 = 28$ d.

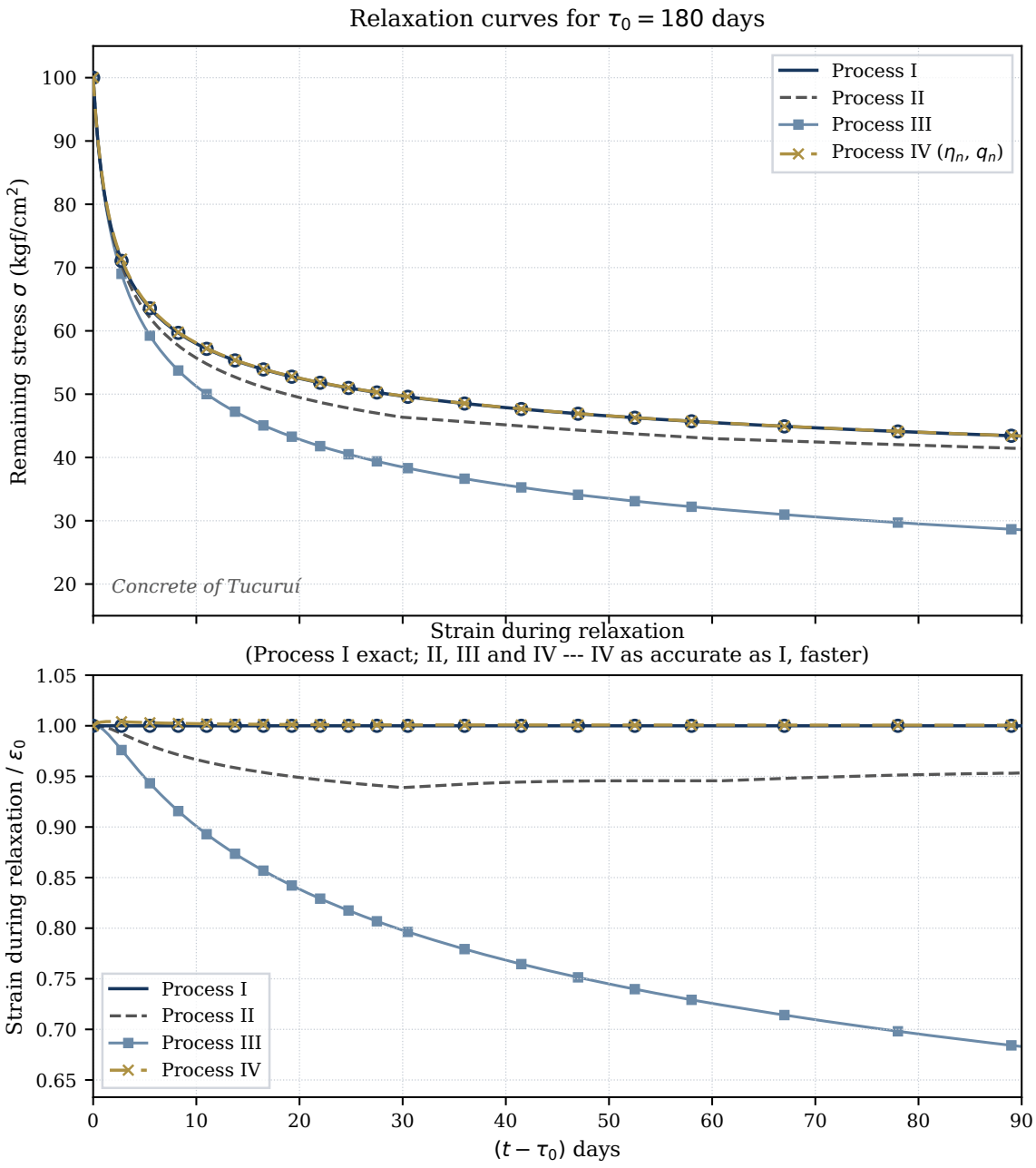

fig. 5

Figura 5 – Tucuruí, $\tau_0 = 180$ d.

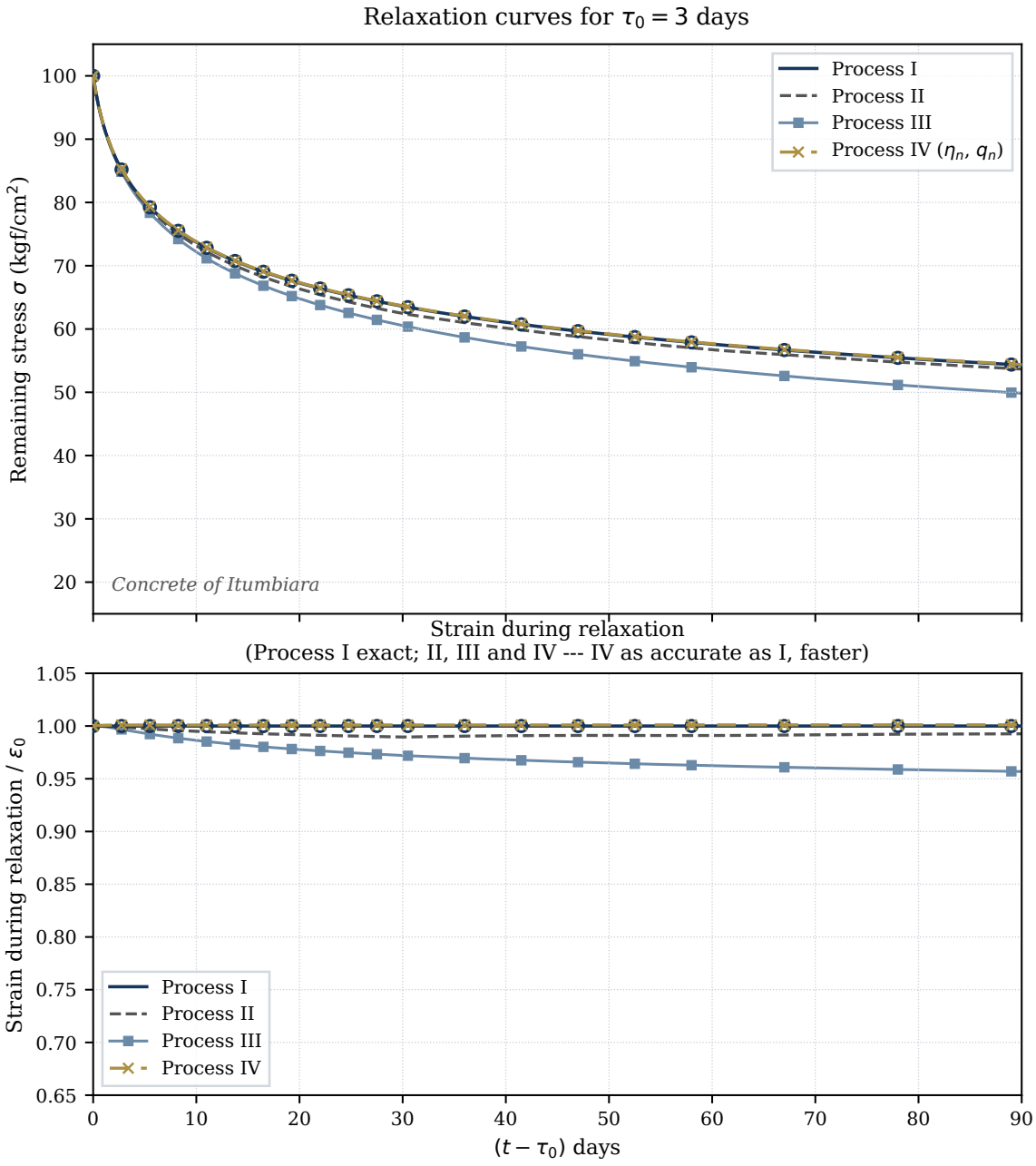

fig. 6

Figura 6 – Itumbiara, $\tau_0 = 3$ d.

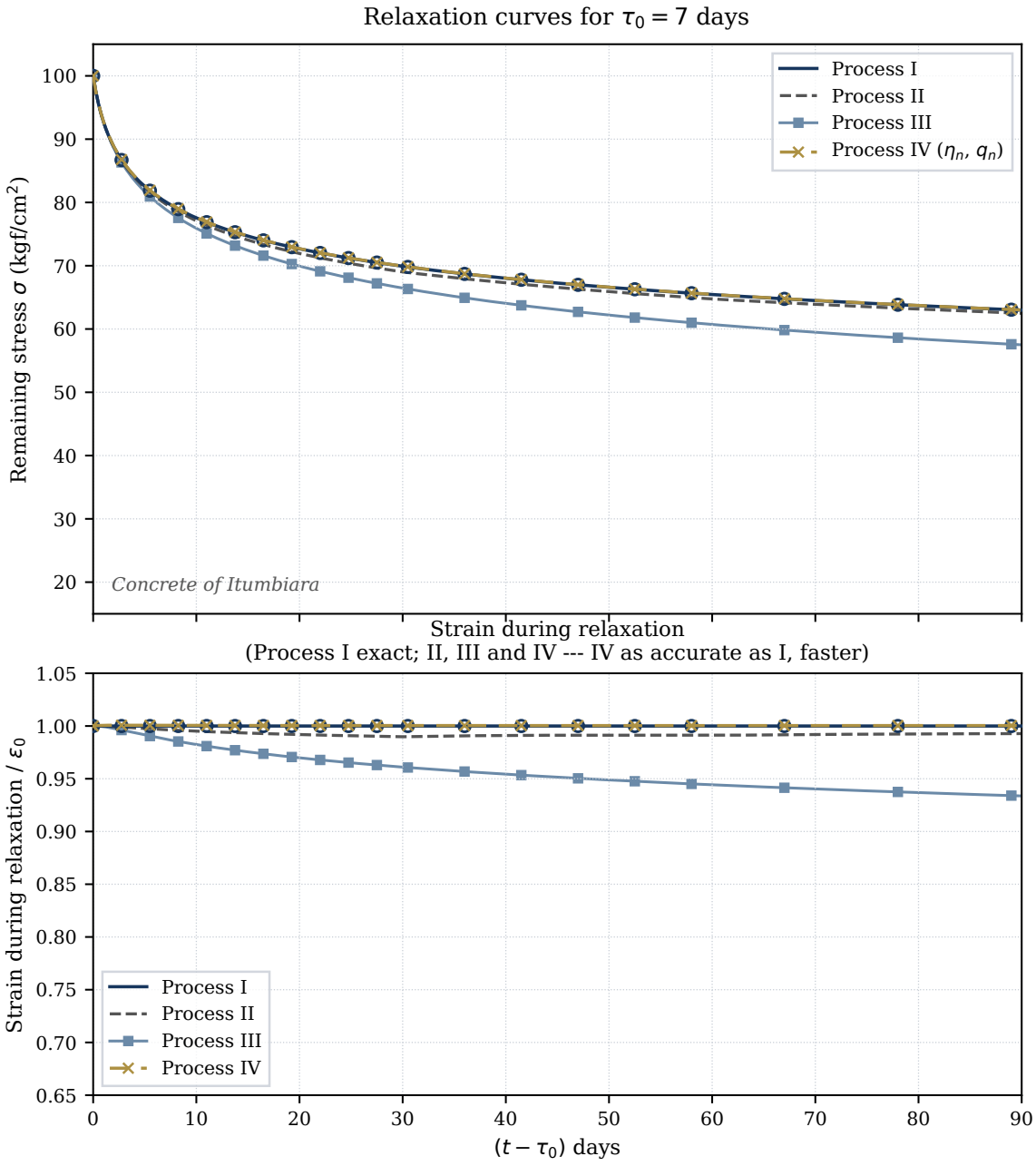

fig. 7

Figura 7 – Itumbiara, $\tau_0 = 7$ d.

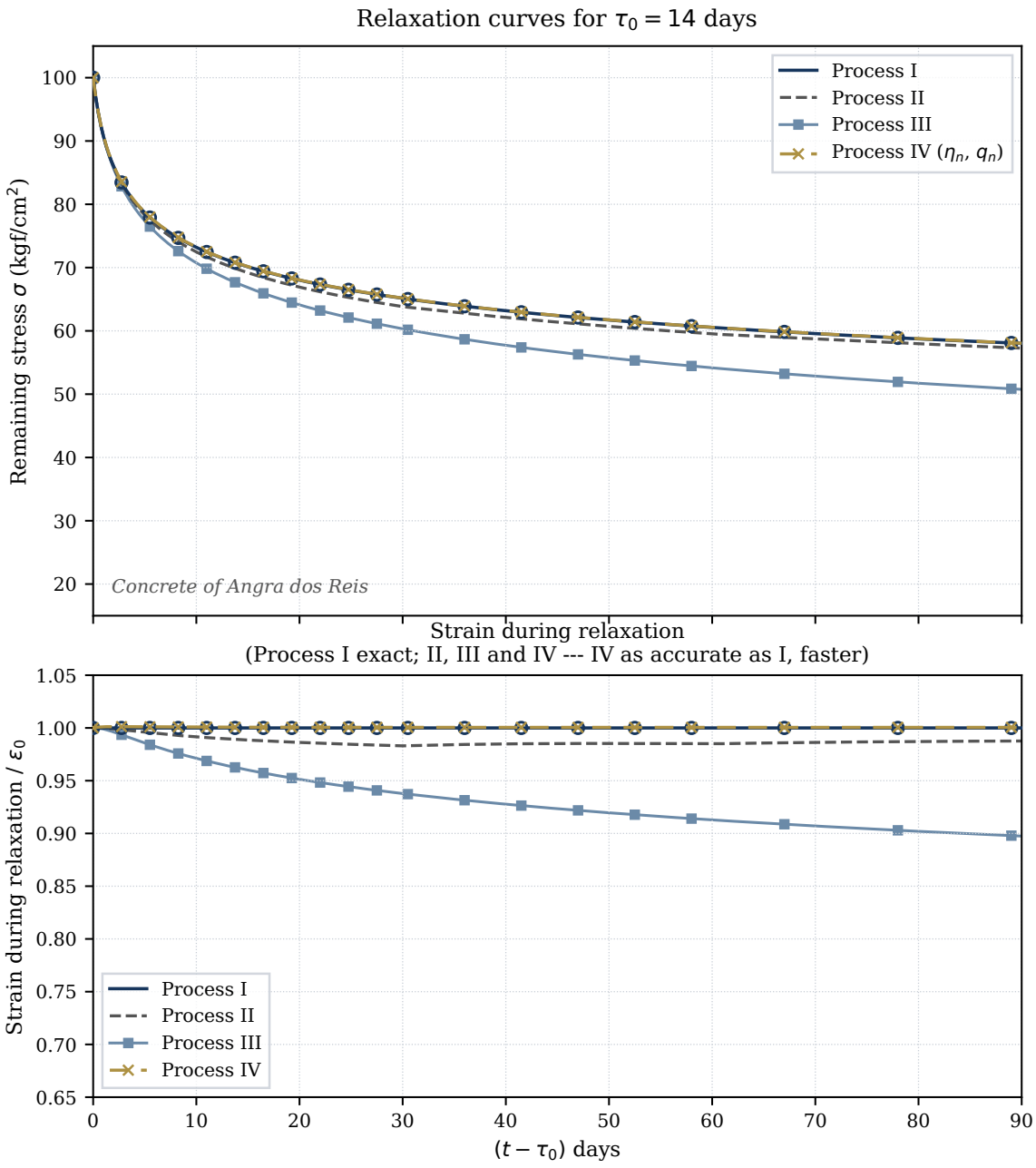

fig. 8

Figura 8 – Angra dos Reis, $\tau_0 = 14$ d.

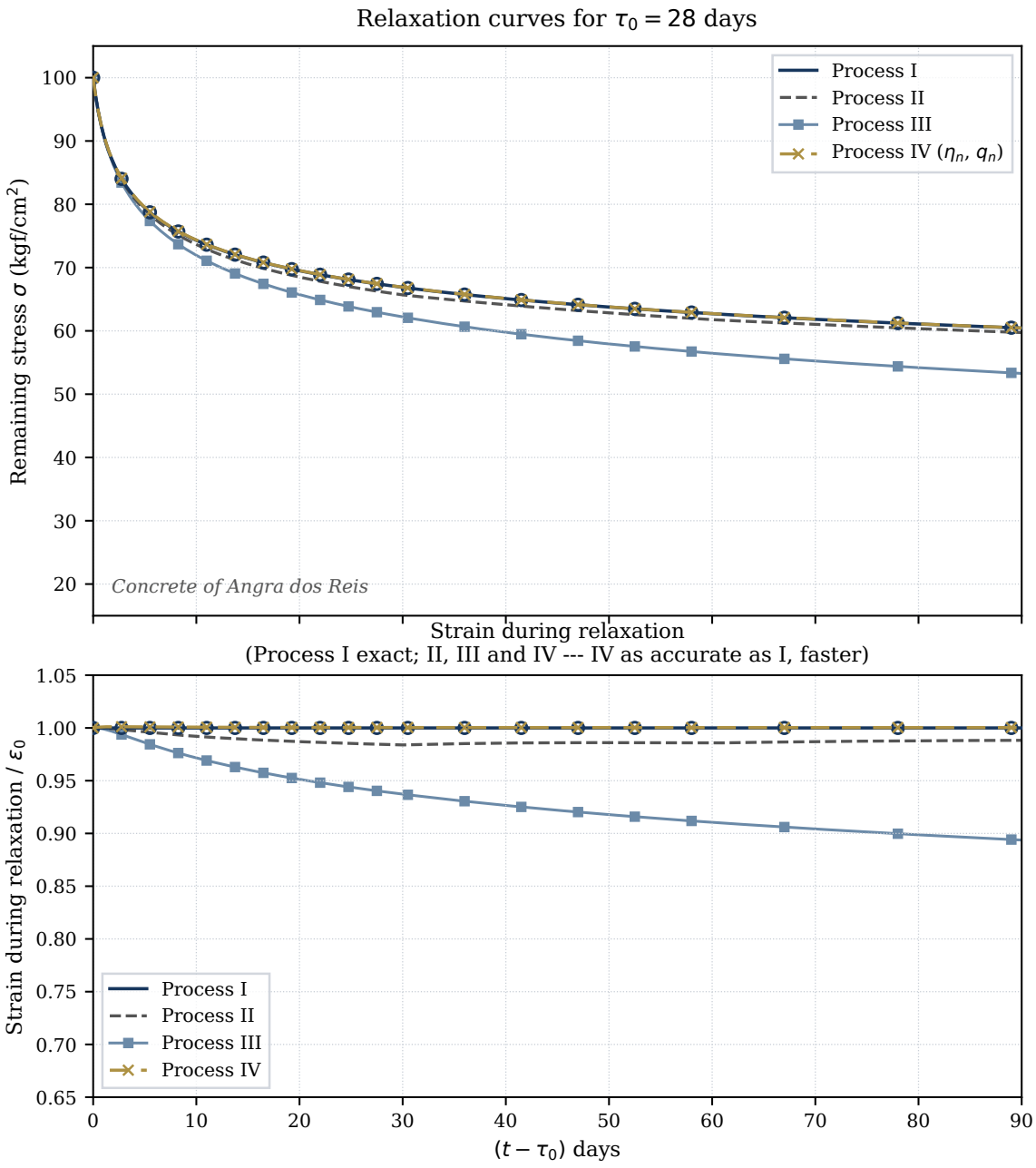

fig. 9

Figura 9 – Angra dos Reis, $\tau_0 = 28$ d.

8 | Conclusions

a) The upper parts of Figs. 3 thru 9 reveal that Carlson's process overestimates relaxation. The difference between the real value of relaxation, calculated through Process I, and the value obtained through Carlson's process increases in a significant way with time elapsed since age τ_0.

b) The relaxation function, obtained through Carlson's process, is not sufficient to preserve a strain equal to unit during the relaxation process. This can be seen from the lower parts of Figs. 3 thru 9.

c) The former conclusions accrue from the fact that the creep phenomenon does not follow Dischinger's hypothesis, which is evident from the model adopted for the creep function.

d) Process II slightly overestimates relaxation. The difference between the relaxation found through Process I and the value obtained through Process II tends to diminish with time elapsed since age τ_0.

e) When calculated through Process II, strain occurring during the relaxation phenomenon is below one, approaching this value as time elapses after application of the initial strain.

A | Characterization of concrete mixes

The characteristics of the concretes used as examples in this paper are given below.[1]

Tabela 4 – Appendix I — mix proportions and properties.

		Angra	Itumbiara	Tucuruí
Cement	Type	ASTM II	ASTM I	ASTM I
	Brand	Mauá	Goiás	Goiás-Pirineus
Aggregate	Fine	Natural & art.	Natural	Natural
	Coarse	Gneiss	Basalt	Metasediment
Composition	Water	180.0	108.0	86.1
(kg/m^3)	Cement	400.0	135.0	120.0
	Natural sand	473.0	551.0	568.2
	Art. sand (0 – nº 8)	137.0	—	—
	Art. sand (nº 4 – 8)	69.0	—	—
	Crushed nº 4 – 3/4"	450.0	208.0	221.6
	Crushed 3/4" – 1 1/2"	674.0	346.0	342.1
	Crushed 1 1/2" – 3"	—	462.0	463.9
	Crushed 3" – 6"	—	693.0	693.8
	W/C	0.450	0.800	0.718
Fresh	Slump (cm)	7.0	1.0	1.0
	Air (%)	1.6	5.6	5.5
f_{ck} (kgf/cm^2)	7 d	249	67	101
	28 d	365	114	164
	90 d	444	138	207
$f_{tk}{}^{*}$ (kgf/cm^2)	7 d	—	6.8	10.8
	28 d	—	10.9	17.3
	90 d	—	14.4	19.8
Strain capacity (10^{-6})	Rapid, 7 d	207	90.5	55
	Rapid, 160 d	276	95.6	84
	Slow, 160 d	317	170.6	110

Notes to Appendix I.

1. * Indirect tensile strength measurement (Brazilian test).
2. Creep tests were carried out on cylinders 10″ in diameter and 20″ high. The modulus of elasticity tests for the concrete used in the Angra dos Reis Nuclear Power Plant were carried out on cylinders with identical dimensions. The modulus of elasticity for the other concretes was obtained from 18″ × 36″ cylinders. The compression strengths were tested in 6″ × 12″ cylinders, with wet-screened concrete for the mass concrete.

[1] O cabeçalho da composição traz «km/m^3» no original; corrigido para kg/m^3. A composição de Angra coincide com a dosagem E-1484/ANG 103 (Figura 5 do relatório de fluência: 180/400/473/137/69/450/674, a/c 0,450); a de Itumbiara é a 140.6.1 (Figura 3: 108/135/551/208/346/462/693, a/c 0,800); a de Tucuruí é a E-963/TUC 192 com pequenas diferenças decimais (Figuras 10–11: 86/120/568/222/342/464/694, a/c 0,717). As capacidades de deformação («strain capacity») são as do método Houghton — rápida e lenta — tratadas no artigo de Carlson, Houghton e Polivka.

3. Time under load for creep tests varied from 2 to 12 months.
4. All the tests were carried out considering compressive loads.

B | References of the original paper

1. Carlson, R. W. *Procedure for Deriving Relaxation from Creep Data* (Appendix — *Manual for the Use of Strain Meters and other Instruments for Embedment in Concrete Structures*). Berkeley, 1975.[1]
2. Dischinger, F. *Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken*. Bauingenieur, 20, 1939.
3. McHenry, D. *A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design*. ASTM Proc. 43, 1943, pp. 1069–1084.
4. Arutyunyan, N. K. *Some Problems in the Theory of Creep*. Pergamon Press, London, 1966.
5. Neville, A. M. *Creep of Concrete: Plain, Reinforced, and Prestressed*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
6. Raphael, J. M. *Determination of Stress from Measurements in Concrete Dams*. R. 54, 3rd International Congress on Large Dams, Stockholm, 1948.
7. Jones, K. *Calculation of Stress from Strain in Concrete*. Technical Memorandum 653 — United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation, 1955.[2]
8. Florentino, C. A. *Stress Measurement in Concrete Dams* (in Portuguese). Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, 1966.[3]

[1] É o apêndice do mesmo *Manual* (4ª ed., 1975) citado como referência [4] no relatório *Determinação da Fluência do Concreto*.

[2] Citada duas vezes no texto — como «Bureau of Reclamation [7]», para o modelo logarítmico, e como «Jones [7]», para a simplificação do logaritmo médio —, o que é coerente: o Memorando Técnico 653 de Jones é documento do Bureau.

[3] Tese de Florentino no LNEC, *Determinação de tensões em barragens de betão*. O artigo não traz data; a referência mais recente é de 1975 e o concreto de Tucuruí situa a redação no início dos anos 1980.

Notas de revisão técnica

Notas em português, do editor, com o olhar da mecânica dos meios viscoelásticos com envelhecimento e do concreto massa. Cada nota indica a que trecho se refere e o que altera ou confirma na leitura. As remissões no corpo do artigo apontam para cá.

Nota T1 — Notação e o símbolo J_{00}

A reconstrução das equações depende de três substituições da máquina de escrever, todas resolvidas pelo contexto e listadas na Nota desta edição. A mais delicada é τ no papel de σ: a eq. (1), lida com σ, é a integral de superposição de Boltzmann na forma de Stieltjes, $\varepsilon(t) = \int_{\tau_0^-}^{t} J(\tau, t-\tau)\,\mathrm{d}\sigma(\tau)$, com o salto inicial σ_0 destacado — forma canônica em McHenry [3] e Arutyunyan [4]. O J_{00} da eq. (5) é $J(\tau_0, 0) = 1/E_0$; a verificação algébrica está no rodapé junto à equação, e a replicação numérica da Nota T7 confirma que só com essa leitura as curvas do artigo são reproduzidas.

Nota T2 — Natureza da eq. (2)

Com $\varepsilon \equiv 1$, a eq. (2) é uma equação integral de Volterra de segunda espécie na incógnita $\sigma(\tau)$, cujo núcleo é a própria função de fluência. Ela exprime a identidade fundamental entre fluência e relaxação em viscoelasticidade linear com envelhecimento, $\int_{\tau_0}^{t} J(\tau, t-\tau)\,\mathrm{d}R(\tau_0, \tau-\tau_0) = 1$, e tem solução única e monótona decrescente sempre que J é não decrescente em t — condição satisfeita pelo modelo (7). A afirmação dos autores de que a integração analítica é em geral impossível está correta; para o modelo logarítmico com $E(\tau)$ e $F(\tau)$ variáveis não há solução fechada.

Nota T3 — O esquema de discretização (eqs. 3–6)

O Processo I é o método passo a passo clássico (McHenry, 1943; formalizado por Bažant em 1972 como *step-by-step method*), com os incrementos $\Delta\sigma_i$ concentrados nos instantes t_i — regra do retângulo aplicada à integral de Stieltjes. A escolha de $\tau_i = t_i$ (incremento no fim do intervalo, com $J_{ii} = 1/E_i$) é a mais simples; a variante de Bažant, que aplica o incremento no ponto médio do intervalo e avalia a fluência com a idade média, é de segunda ordem. Para a malha adotada pelos autores (0,25 d nos primeiros 30 dias), o erro de discretização do Processo I é desprezível: refinando a malha por 2 e por 4, a tensão remanescente aos 90 dias do concreto de Tucuruí ($\tau_0 = 7$ d) passa de 37,89 para 37,96 e 37,99 kgf/cm^2 — variação de 0,3%, muito inferior às diferenças entre processos. O custo do Processo I é $O(n^2)$, porque a soma em (5) percorre todo o histórico a cada passo; é essa a motivação prática do Processo II.

Nota T4 — O Processo II e o sinal do seu erro (eq. 8)

O teorema do valor médio garante que existe τ^* no intervalo $[t_1, t_{n-1}]$ tal que a igualdade em (8) é exata — porque todos os pesos $\Delta\sigma_i F_i$ têm o mesmo sinal (negativo). Esse τ^* exato é a média das

idades ponderada por $|\Delta\sigma_i F_i|$; como os decrementos de tensão são maiores no início da relaxação e F decresce com a idade, o τ^* exato é sempre anterior à média aritmética τ_n^* adotada. Substituir um pelo outro reduz $\ln(1+t_n-\tau^*)$, subestima a parcela de fluência recuperada pelos decrementos passados e torna $\Delta\sigma_n$ mais negativo: o Processo II superestima a relaxação, exatamente como registra a conclusão (d), e por essa razão. A vantagem de recorrência é real: bastam dois acumuladores, $\sum \Delta\sigma_i/E_i$ e $\sum \Delta\sigma_i F_i$, atualizados a cada passo, e o custo cai para $O(n)$ — o mesmo ganho que hoje se obtém com a formulação de taxa (cadeia de Kelvin), que dispensa o armazenamento do histórico por construção. Há uma pequena inconsistência formal na definição de τ_n^*: ela inclui τ_0 e t_n, enquanto a soma em (8) vai de $i=1$ a $n-1$; o efeito numérico é irrelevante, mas a média coerente seria a das idades t_1 a t_{n-1}.

Nota T5 — Seção 4: a prova e o seu significado

A hipótese de «paralelismo» de Dischinger é a hipótese da taxa de fluência (*rate of creep*): $J(\tau, t-\tau) = 1/E(\tau) + \varphi(t) - \varphi(\tau)$, com φ dependente só do tempo absoluto, de modo que todas as curvas de fluência têm a mesma taxa num dado instante, qualquer que seja a idade de carregamento. Introduzida em (3), ela produz (15), que é a discretização de Euler explícita da equação diferencial de Dischinger para relaxação: com $\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\sigma/E(t) + \sigma\,\mathrm{d}\varphi = 0$, tem-se $\mathrm{d}\sigma/\sigma = -E(t)\,\mathrm{d}\varphi$ e a solução fechada

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left[-\int_{\tau_0}^{t} E(\tau)\,\frac{\partial J(\tau_0, \tau-\tau_0)}{\partial \tau}\,\mathrm{d}\tau\right] = \sigma_0 \exp\left[-F_0 \int_{\tau_0}^{t} \frac{E(\tau)}{1+\tau-\tau_0}\,\mathrm{d}\tau\right],$$

esta última para o modelo (7). A prova dos autores de que o processo de Carlson é idêntico a (15) está correta e completa; o que ela estabelece é que o processo de Carlson não é uma aproximação numérica da eq. (2), mas a solução exata de outra hipótese constitutiva. A replicação numérica confirma: para Tucuruí, $\tau_0 = 7$ d, o Processo III dá 24,3 kgf/cm^2 aos 90 dias e a solução fechada de Dischinger acima dá 24,6 — a diferença entre III e I (37,9) é toda de hipótese, não de discretização.

Nota T6 — Por que o modelo (7) viola o paralelismo

A conclusão (c) está correta e admite demonstração direta: $\ln(1+t-\tau)$ não é separável na forma $\varphi(t)-\varphi(\tau)$, e a taxa de fluência do modelo, $F(\tau)/(1+t-\tau)$, depende da idade de carregamento — é alta para uma carga recém-aplicada e baixa para a carga antiga. Na relaxação, cada decremento $\Delta\sigma_i$ é uma carga nova aplicada em t_i, que «flui de volta» com taxa inicial elevada F_i; Dischinger lhe atribui a taxa residual da carga original, $F_0/(1+t-\tau_0)$, muito menor. O processo de Carlson subestima portanto a recuperação de fluência dos decrementos, exige decrementos maiores para manter a deformação e superestima a relaxação — conclusão (a). É a limitação clássica do método da taxa de fluência, conhecida desde os trabalhos de Nielsen e Rüsch e resolvida, na década de 1970, pelo método do módulo efetivo ajustado à idade (Trost–Bažant), que introduz o coeficiente de envelhecimento χ. Observe-se que a conclusão (b) — a deformação calculada com a curva de Carlson cai abaixo da unidade — é a contraparte direta de (a): tensão remanescente menor que a verdadeira implica deformação menor que a imposta.

Nota T7 — Replicação numérica dos três processos

Para validar a leitura das equações e dos coeficientes das Tabelas 2 e 3, os três processos foram programados exatamente como descritos (script `relaxation_processes.py`), com $\sigma_0 = 100$ kgf/cm^2 e a malha de tempo da Seção 7. Os resultados aos 90 dias:

Tabela 5 – Tensão remanescente (kgf/cm^2) e deformação normalizada aos 90 dias — replicação desta edição.

Concreto, τ_0	E_0	$F_0 \cdot 10^6$	I	II	III	IV	ε III	ε IV
Tucuruí, 7 d	280 100	0,940	37,9	36,0	24,3	38,0	0,758	1,002
Tucuruí, 28 d	355 400	0,760	43,0	41,1	28,3	43,1	0,696	1,001
Tucuruí, 180 d	384 400	0,716	43,4	41,4	28,6	43,4	0,683	1,001
Itumbiara, 3 d	161 200	0,679	54,3	53,7	49,8	54,4	0,957	1,001
Itumbiara, 7 d	211 600	0,505	63,0	62,5	57,5	63,0	0,934	1,000
Angra, 14 d	202 100	0,689	58,0	57,3	50,8	58,0	0,898	1,001
Angra, 28 d	220 500	0,613	60,4	59,7	53,3	60,5	0,894	1,000

A Figura 3 do original (Tucuruí, $\tau_0 = 7$ d), lida em ampliação, mostra as curvas I, II e III terminando em cerca de 38, 36 e 24 kgf/cm^2, e o erro em deformação dos processos II e III em cerca de 0,96 e 0,76 — coincidência com a replicação dentro da resolução de leitura do gráfico. O Processo IV (Nota T11) cola no Processo I. Isso fecha a verificação: notação, equações, coeficientes e malha de tempo foram lidos corretamente. As Figuras 3 a 9 desta edição são essas curvas regeneradas, com o Processo IV sobreposto.

Nota T8 — Os modelos de envelhecimento e a ligação com o relatório de fluência

O modelo (21) com $n = 1$ é $1/E = a_1 + a_0/\tau$, e o (22) é $1/E = (1/a_0)\,e^{a_1/\tau}$: são exatamente as formas $a + b/t$ e $a\,e^{b/t}$ da Tabela 1 (pág. 37) do relatório *Determinação da Fluência do Concreto*, o que confirma a origem comum dos dois trabalhos no laboratório de Itumbiara. Os coeficientes de Itumbiara reproduzem bem a ficha 140.6.1 (concreto integral): $F(3) = 0{,}68$, $F(7) = 0{,}51$ e $F(28) = 0{,}43$ contra 0,668, 0,549 e 0,398 medidos; $1/E(3) = 6{,}2$ contra 6,128. A Tabela 2 indica, porém, idades 3, 7, 28 e 90 dias para o módulo de Itumbiara, e a ficha 140.6.1 só tem 3, 7 e 28: houve um ensaio adicional aos 90 dias não registrado naquela ficha. Os módulos assintóticos $E_\infty = 1/a_1$ resultam 242 500 (Angra), 390 000 (Tucuruí) e 276 000 kgf/cm^2 (Itumbiara); o valor de Tucuruí é alto para um concreto de metagrauvaca com $f_{ck,90} = 207$ kgf/cm^2, consequência do ajuste a poucos pontos com a forma $a + b/\tau$, que extrapola mal — a mesma razão pela qual, na edição do relatório de fluência, essas formas foram substituídas por exponenciais monótonas. Nota-se ainda que o critério «maior coeficiente de correlação» aplicado a modelos com número diferente de parâmetros, e a exclusão dos modelos (21) com raiz positiva no denominador (que produziriam um polo em E numa idade positiva), são procedimentos de época; um critério de informação faria hoje o mesmo serviço com menos arbitrariedade.

Nota T9 — Linearidade e nível de tensão

A hipótese de linearidade, invocada na Seção 3, vale em concreto até cerca de 40% da resistência à compressão na idade de carregamento. Nos ensaios de fluência que alimentam as Tabelas 2 e 3, as tensões aplicadas variaram de 21% a 48% da ruptura (Figuras 5, 10 e 11 do relatório de fluência); os casos próximos de 45–48% estão no limite da linearidade, e a função de fluência ajustada neles incorpora alguma não linearidade. Para a relaxação com $\sigma_0 = 100$ kgf/cm^2 — 60% de $f_{ck,28}$ de Tucuruí e 88% de $f_{ck,28}$ de Itumbiara — a linearidade não se sustentaria fisicamente; como o cálculo é linear, σ_0 é apenas um fator de escala e o resultado deve ser lido como a função de relaxação normalizada R/E_0, em percentagem, que é como as Figuras 3 a 9 o apresentam.

Nota T10 — Enquadramento posterior

O artigo é uma aplicação correta e precoce, no meio brasileiro de barragens, da teoria da viscoelasticidade linear com envelhecimento à obtenção de relaxação a partir da fluência, e chega, por via numérica, a uma conclusão que a literatura consolidou na mesma época: o método da taxa de fluência (Dischinger, e portanto o processo de Carlson) superestima a relaxação, tanto mais quanto mais tardia a idade de observação. A fórmula aproximada de Bažant e Kim (1979) dá $R(t,\tau_0)$ a partir de J com erro da ordem de 1–2% e dispensa a equação integral para uso corrente. A formulação de taxa com cadeia de Kelvin envelhecida — Processo IV desta edição, Nota T11 — resolve a mesma eq. (2) com custo $O(n)$ e é o caminho natural para incorporar estas curvas a uma análise térmica incremental de concreto massa.

Nota T11 — Processo IV: formulação em taxa (η_n, q_n)

Sobre a *mesma* função de fluência das Tabelas 2 e 3,

$$J(\tau, t-\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + F(\tau)\,\ln(1+t-\tau),$$

representa-se o núcleo logarítmico por uma cadeia de Kelvin com envelhecimento, $D(t,z) = \sum_i D_i(z)\,[1-e^{-(t-z)/\tau_i}]$, com $D_i(z) = \varphi_i F(z)$ e espectro (τ_i, φ_i) normalizado a $\ln(1+\xi)$ (o mesmo núcleo do ajuste Itumbiara do artigo sobre tensões de origem térmica). O incremento de fluência no passo n escreve-se

$$\Delta\varepsilon_n^{\mathrm{cr}} = \eta_n + q_n\,\Delta\sigma_n,$$

em que η_n concentra o degrau inicial e a memória auxiliar ω_i, e q_n depende só de D_i, τ_i e Δt_n — conhecido antes de se resolver o equilíbrio do passo. Sob deformação prescrita ($\Delta\varepsilon = 0$ após o salto elástico), isola-se $\Delta\sigma_n = -\eta_n/(1/E_n + q_n)$. O custo é $O(n)$: não se percorre o histórico completo a cada passo, ao contrário do Processo I.

Nas Figuras 3–9 a curva IV (tracejado longo com marcadores $\times$, cor ocre) sobrepõe-se à do Processo I. Aos 90 dias, $|\sigma_{\mathrm{IV}} - \sigma_{\mathrm{I}}|$ fica entre 0,02 e 0,08 kgf/cm^2, e a deformação verificada com a J Raphael permanece em 1,000–1,002. A diferença residual é de discretização e de espectro, não de hipótese constitutiva: com a mesma J, a formulação em taxa reproduz a solução da equação integral. Na malha desta edição ($n \simeq 211$ pontos), o Processo IV corre cerca de 2,7 vezes mais rápido que o Processo I; o fator cresce com o refinamento (cerca de 11 vezes quando a malha é quadruplicada), como se espera de $O(n)$ frente a $O(n^2)$.

A formulação η_n, q_n e a bateria de verificação analítico-numérica estão em Gomes e Souza (2026).[1] A página do projeto Legacy do Instituto Roy Carlson reúne o artigo e a implementação correspondente: https://institutoroycarlson.org/legado/en/.

[1] Gomes, F. M. P.; Souza, F. V. *Formulação incremental a partir da função de fluência para concreto com envelhecimento e tensões de origem térmica no concreto massa — Parte I: validação analítico-numérica.* Revista do Instituto Roy Carlson, v. 1, n. 2, 2026. DOI:10.70271/rirc.v1n2a007.