

www.institutoroycarlson.org/revista

REVISTA IRC - Revista do Instituto Roy Carlson

TM Instituto Roy Carlson é uma instituição sem fins lucrativos dedicada a manter a memória técnica do concreto massa no Brasil e à difusão do conhecimento científico nos assuntos relacionados a barragens, com ênfase em concreto.



Cálculo de tensões de origem térmica no concreto massa considerando fluência com envelhecimento — Parte I: formulação e validação analítico-numérica

Flávio Mamede Pereira Gomes¹
Flávio Vasconcelos Souza²

¹ FM Furnas Engenharia / Instituto Roy Carlson; ² Multimechanics (flaviovs@gmail.com); fundador; ex-Director of Siemens

Informações

Recebido em
Aprovado em
Publicado em 2026

Palavras-chave

concreto massa, fluência com envelhecimento, tensões térmicas, viscoelasticidade, elementos finitos, validação analítico-numérica.

Sumário

Este trabalho apresenta a Parte I — analítico-numérica — de uma validação de um modelo constitutivo viscoelástico: a formulação incremental da deformação de fluência *com envelhecimento* para o cálculo de tensões de origem térmica em estruturas de concreto massa. Parte-se da função de fluência obtida diretamente de ensaio (ou de modelo reológico a ela ajustado). Diferentemente da formulação clássica viscoelástica de Zocher, Groves e Allen (1997), baseada na função de relaxação e sem envelhecimento explícito, a dedução ora apresentada opera sobre a função de fluência com envelhecimento, escrita na forma de uma série de Dirichlet–Prony com coeficientes dependentes da idade de carregamento. A estratégia leva a um algoritmo recursivo em que o incremento de deformação da fluência, em cada passo de tempo, separa-se em uma parcela hereditária conhecida e uma parcela proporcional ao incremento atual de tensão. Com isso, o problema viscoelástico com envelhecimento reduz-se, a cada passo, a um problema elástico equivalente, adequado à implementação em elementos finitos. A formulação é validada em problemas analítico-numéricos (à maneira de Zhu Bofang (2014) e Zocher et al. (1997), estado plano e laje fixa). A validação numérico-experimental em obra (VET / UHE Santo Antônio) é objeto da Parte II.

1. Introdução

Estruturas de concreto livres para se deformar quando sujeitas a uma variação de temperatura, não apresentam esforço interno: o material apenas varia sua dimensão, proporcional ao gradiente térmico aplicado. No entanto, sempre existem restrições — externas (ligação com a fundação ou com outras estruturas) e internas (gradiente entre o núcleo e a superfície ou ligação com armadura). Tais restrições provocam o surgimento de esforços internos que, se superiores à capacidade de resistência do concreto, podem levá-lo à fissuração.

No concreto massa, o campo de temperaturas é governado pela geração interna de calor da hidratação e pela *lei de Fourier* de condução térmica. As tensões de origem térmica, por sua vez, dependem não apenas do campo de temperatura, mas também da evolução das propriedades mecânicas com a idade, de modo especial da *fluência com envelhecimento*. Modelos viscoelásticos com envelhecimento para o concreto massa de barragens — e a resolução numérica dessas leis no cálculo das tensões de origem térmica — foram tratados por Guedes e Gambale (1990) e por Gambale et al. (1992). Sendo o concreto um material viscoelástico, as tensões em seu interior relaxam ao longo do tempo, um dos principais fatores em favor da redução do potencial de fissuração.

A previsão quantitativa desse efeito exige um modelo constitutivo que:

1. parta da função de fluência com envelhecimento (obtida por ensaio, ajustada a uma cadeia de Kelvin com envelhecimento);
2. admita história arbitrária de tensões e deformações impostas (não apenas carregamento constante);

3. seja numericamente tratável em elementos finitos, sem armazenar toda a história de tensões a cada passo de tempo, por tratar-se de um problema transiente.

Zocher, Groves e Allen (1997) desenvolveram uma formulação tridimensional em elementos finitos para meios ortotrópicos termoviscoelásticos lineares, convertendo a forma integral baseada nos *módulos de relaxação* (série de Dirichlet–Prony) em uma relação algébrica incremental e recursiva. Essa abordagem elimina o problema de armazenamento típico de materiais com memória e é eficaz para fluência e relaxação sob a hipótese de taxa constante em cada passo. Contudo, (i) opera sobre a função de *relaxação*, e não sobre a função de *fluência*; e (ii) não incorpora o *envelhecimento* — a dependência explícita da idade de carregamento — que é essencial no concreto jovem.

Este artigo constitui a **Parte I** da validação de um modelo constitutivo viscoelástico. O objetivo é apresentar, detalhadamente, a dedução que permite escrever o incremento de deformação de fluência com envelhecimento na forma

$$\{\Delta \varepsilon^{cr}(t_n)\} = \{\eta_n\} + q_n [\mathbb{V}]\{\Delta \sigma_n\},$$

em que $\{\eta_n\}$ concentra o histórico (conhecida a partir da condição inicial) e q_n é um escalar calculável a partir da função de fluência e do intervalo de tempo corrente. Com isso, o incremento atual de tensão entra de modo análogo a um módulo elástico tangente, e o algoritmo torna-se implementável no mesmo sentido da formulação de Zocher et al., porém ancorado na função de fluência com envelhecimento. Em seguida, valida-se a formulação exposta em problemas com solução analítica conhecida, comparando esta com a solução numérica dessa implementação (à maneira de Zhu Bofang (2014) e Zocher et al. (1997), estado plano e laje fixa). A validação numérico-experimental em campanha de instrumentação no concreto massa classe J do VET da UHE Santo Antônio, com processamento dos resultados de deformação, é objeto da **Parte II** (em preparação).

2. Equações governantes do problema mecânico

Consiste em resolver as equações de equilíbrio e de compatibilidade da Mecânica Clássica pelo método dos elementos finitos. As equações governantes são as equações de equilíbrio, as relações deformação–deslocamento e a equação constitutiva:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho f = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$d\boldsymbol{\sigma}(x, \xi) = E(x, \xi) \mathbb{V}^{-1} : d \left(\boldsymbol{\varepsilon}(x, \xi) - \boldsymbol{\varepsilon}^{cr}(x, \xi) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(x, \xi) - \boldsymbol{\varepsilon}^{shr}(x, \xi) - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(x, \xi) \right).$$

As condições de contorno clássicas leem-se:

$$\begin{aligned} u &= \widehat{u} && \text{em } \partial\Omega_1, \\ T &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \widehat{T} && \text{em } \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

A deformação de fluência, na forma integral de hereditariedade, é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{cr}(x, \xi) = \int_0^\xi \mathbb{D}(x, \xi, \xi') : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x, \xi')}{\partial \xi'} d\xi'.$$

A integral é entendida como sendo a integral de Stieltjes: eventuais descontinuidades (degraus) da história de tensões contribuem com termos discretos, explicitados na Seção 4.

Na formulação acima, f é a força de corpo, T é a tração superficial, n é o vetor unitário normal exterior à fronteira, e ρ é a densidade de massa. Subentendido que $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ e os operadores constitutivos são funções do ponto x . Doravante, por facilidade de notação, x é omitido onde não há ambiguidade.

Observe-se que a parcela elástica instantânea é carregada pelo módulo $E(\xi)$ da própria equação constitutiva incremental; a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^{cr}$ é, portanto, a fluência *propriamente dita*, isto é, a parte dependente do tempo, sem a parcela $1/E$. Essa separação fixa o significado da função D adotada em todo o texto (Seção 3).

Considerando, com base em ampla bibliografia, que para o concreto o coeficiente de Poisson pode ser tratado como simplesmente elástico (independente do tempo), o tensor de quarta ordem $\mathbb{D}$ particulariza-se como o produto de um tensor de quarta ordem $\mathbb{V}$, independente do tempo e da idade, por um escalar D dependente do tempo e da idade (função de fluência com envelhecimento):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{cr}(\xi) = \mathbb{V} : \int_0^\xi D(\xi, \xi') \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi'.$$

Os argumentos ξ e ξ' são o *tempo equivalente* (ou tempo reduzido ou pseudo-tempo), que descreve a influência da temperatura sobre a cinética viscoelástica:

$$\xi = \xi(t) \equiv \int_0^t \frac{1}{a_T} d\tau, \quad \xi' = \xi(t') \equiv \int_0^{t'} \frac{1}{a_T} d\tau,$$

em que $a_T = a_T[\theta(\tau)]$ é o *shift factor* do princípio de superposição tempo-temperatura. Esse fator pode ser expresso, por exemplo, por uma equação de Arrhenius em função da energia de ativação.

Para o material isotrópico, o tensor $\mathbb{V}$ admite a representação matricial (notação de Voigt)

$$[\mathbb{V}] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

A notação $[\mathbb{V}]$ (forma matricial de Voigt) e $\mathbb{V}$ (forma tensorial), bem como a regra prática para projeções direcionais e montagem da roseta, estão detalhadas em nota.

3. Função de fluência com envelhecimento

A função de fluência total $J(t, z)$, que por facilidade de notação, mas sem perda de generalidade mantemos t e z , é uma deformação por unidade de tensão no instante t devida a um carregamento aplicado na idade z . Pode-se escrever:

$$J(t, z) = \frac{1}{E(z)} + D(t, z),$$

em que $1/E(z)$ é a parcela elástica instantânea (módulo na idade de carregamento) e $D(t, z)$ é a parcela de fluência propriamente dita, ou seja, a parcela dependente do tempo. Um modelo reológico generalizado (cadeia de Kelvin com envelhecimento), ajustável a ensaios, é:

$$D(t, z) = \sum_{i=1}^N D_i(z) \left[1 - e^{-(t-z)/\tau_i} \right].$$

Os coeficientes $D_i(z)$ dependem da idade de carregamento (envelhecimento); os tempos de retardo τ_i fixam o *espectro* da cadeia ($i = 1, \dots, N$). Note-se que D depende do instante corrente t apenas através da duração do carregamento $t - z$, ao passo que a idade z entra duplamente: na duração e nas amplitudes $D_i(z)$. Uma forma usual de envelhecimento das amplitudes é

$$D_i(z) = a_i + b_i e^{-z/c_i}.$$

ou, se necessário para melhor ajuste aos dados, com várias constantes de tempo de envelhecimento,

$$D_i(z) = a_i + \sum_{j=1}^{M_i} b_{i,j} e^{-z/c_{i,j}},$$

em que o termo constante a_i fica fora do somatório (as parcelas constantes de cada exponencial se agregam num único a_i) e M_i é o número de exponenciais de envelhecimento da i -ésima unidade.

É mostrado no Anexo B que esta forma permite um cálculo exato para o modelo de fluência conhecido como B4 (Bažant, Hubler e Wendner, 2015): as amplitudes têm representação espectral em forma fechada, e a dependência em z resulta ser uma superposição de exponenciais decrescentes com coeficientes não negativos e sem termo constante. O mesmo anexo trata das restrições de admissibilidade que a superfície de fluência deve respeitar e do alcance da alternativa por regressão.

Em termos do tempo reduzido, a mesma estrutura aparece como:

$$D(\xi, \xi') = \sum_{i=1}^N D_i(\xi') \left[1 - e^{-(\xi-\xi')/\tau_i} \right],$$

com os τ_i medidos na escala de tempo reduzido. Para não sobrecarregar a notação, a dedução a seguir é escrita em t e z ; a leitura em tempo reduzido é obtida substituindo $t \rightarrow \xi$ e $z \rightarrow \xi'$, sem qualquer alteração algébrica.

4. Equação constitutiva da fluência e objetivo da dedução

Sob carregamento uniaxial (ou, em 3D, considerando $\mathbb{V}$), a deformação de fluência no instante t é:

$$\varepsilon^{cr}(t) = \Delta\sigma_0 D(t, t_0) + \int_{t_0}^t D(t, z) \frac{\partial\sigma}{\partial z} dz.$$

Em três dimensões,

$$\{\varepsilon^{cr}(t)\} = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} D(t, t_0) + \int_{t_0}^t D(t, z) [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial\sigma}{\partial z} \right\} dz.$$

A história de tensões admite a representação:

$$\sigma(t) = H(t - t_0) \Delta\sigma_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial\sigma}{\partial z} dz,$$

em que H é a função de Heaviside e $\Delta\sigma_0$ é o salto inicial de tensão em t_0 (se houver). O primeiro termo da deformação de fluência é, portanto, a contribuição discreta desse degrau, e a integral cobre apenas a parte contínua da história. O objetivo da dedução é mostrar que o *incremento* de deformação de fluência no passo que termina em t_n pode ser escrito na forma:

$$\{\Delta\varepsilon^{cr}(t_n)\} = \{\eta_n\} + q_n [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_n\}.$$

Essa forma permite, em cada passo, tratar $\{\eta_n\}$ como “deformação imposta” conhecida e absorver $q_n \mathbb{V}$ na matriz de rigidez tangente (ou no operador constitutivo incremental).

5. Discretização temporal e incremento de fluência

Em um intervalo típico, t_n é o instante genérico e $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$. Adota-se a mesma hipótese da formulação de Zocher et al., um dos aspectos mais inovadores daquela formulação e responsável pelo enorme ganho de eficiência na implementação, fazendo a taxa de tensão constante dentro do intervalo, e depois disso integrando analiticamente o histórico de tensões dentro desse intervalo.

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \text{cte} = \frac{\Delta\sigma_n}{\Delta t_n} \quad \text{para } z \in [t_{n-1}, t_n].$$

O incremento de deformação de fluência é, por definição,

$$\{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} = \{\varepsilon^{cr}(t_n)\} - \{\varepsilon^{cr}(t_{n-1})\}.$$

Substituindo a equação constitutiva em t_n e em t_{n-1} ,

$$\begin{aligned} \{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} &= [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} D(t_n, t_0) + \int_{t_0}^{t_n} D(t_n, z) [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial\sigma}{\partial z} \right\} dz \\ &\quad - [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} D(t_{n-1}, t_0) - \int_{t_0}^{t_{n-1}} D(t_{n-1}, z) [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial\sigma}{\partial z} \right\} dz. \end{aligned}$$

O operador $[\mathbb{V}]$ é constante e multiplica igualmente os termos em t_n e em t_{n-1} , podendo ser posto em evidência sempre que conveniente.

5.1 Introdução de $\Delta D_{n,z}$ e separação das integrais

Definimos

$$\Delta D_{n,z} = D(t_n, z) - D(t_{n-1}, z).$$

Separando o intervalo de integração $[t_0, t_n]$ em $[t_0, t_{n-1}]$ e $[t_{n-1}, t_n]$, e agrupando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} &= [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} \Delta D_{n,0} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} D(t_n, z) [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial\sigma}{\partial z} \right\} dz \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_{n-1}} \Delta D_{n,z} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial\sigma}{\partial z} \right\} dz, \end{aligned}$$

com a notação abreviada $\Delta D_{n,0} \equiv \Delta D_{n,z}|_{z=t_0} = D(t_n, t_0) - D(t_{n-1}, t_0)$.

Chamando a primeira integral de I e a segunda de II ,

$$I = \int_{t_{n-1}}^{t_n} D(t_n, z) [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz,$$

$$II = \int_{t_0}^{t_{n-1}} \Delta D_{n,z} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz,$$

tem-se:

$$\{\Delta \varepsilon_n^{cr}\} = [\mathbb{V}] \{\Delta \sigma_0\} \Delta D_{n,0} + I + II.$$

A parcela I envolve apenas o intervalo corrente e, portanto, o incremento desconhecido $\{\Delta \sigma_n\}$. A parcela II e o termo em $\Delta D_{n,0}$ envolvem apenas a história até t_{n-1} e serão reunidos em $\{\eta_n\}$.

5.2 Resolução da integral I (parcela do passo corrente)

Inserindo a série de fluência em I ,

$$I = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sum_{i=1}^N D_i(z) \left[1 - e^{-(t_n - z)/\tau_i} \right] [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz.$$

Definindo:

$$D_{i,n}^* = D_i \left(t_n - \frac{\Delta t_n}{2} \right),$$

isto é, um valor de D_i constante entre t_{n-1} e t_n , avaliado no meio do intervalo, e sabendo que $[\mathbb{V}]$ independe de z e que $\{\partial \sigma / \partial z\}$ também é constante nesse intervalo, e lembrando que a soma e a integral comutam ($\int \sum = \sum \int$), decorre que:

$$I = [\mathbb{V}] \frac{\{\Delta \sigma_n\}}{\Delta t_n} \sum_{i=1}^N D_{i,n}^* \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[1 - e^{-(t_n - z)/\tau_i} \right] dz.$$

A primitiva do integrando, em relação a z , é:

$$\int \left[1 - e^{-(t_n - z)/\tau_i} \right] dz = z - \tau_i e^{-(t_n - z)/\tau_i},$$

pois

$$\frac{d}{dz} e^{-(t_n - z)/\tau_i} = \frac{1}{\tau_i} e^{-(t_n - z)/\tau_i}.$$

Avaliando entre t_{n-1} e t_n ,

$$\left[z - \tau_i e^{-(t_n - z)/\tau_i} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} = \Delta t_n - \tau_i \left(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right).$$

Portanto,

$$I = [\mathbb{V}] \frac{\{\Delta \sigma_n\}}{\Delta t_n} \sum_{i=1}^N D_{i,n}^* \left[\Delta t_n - \tau_i \left(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right) \right],$$

ou seja,

$$I = q_n [\mathbb{V}] \{\Delta \sigma_n\},$$

sendo

$$q_n = \sum_{i=1}^N D_{i,n}^* \left[1 - \frac{\tau_i}{\Delta t_n} \left(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right) \right].$$

O escalar q_n depende apenas da função de fluência (via D_i e τ_i) e do passo Δt_n : é conhecido *antes* de se resolver o equilíbrio do passo n . Convém registrar dois limites de controle, úteis na verificação numérica da implementação: para $\Delta t_n/\tau_i \rightarrow 0$ o colchete tende a $\Delta t_n/(2\tau_i)$, e $q_n \rightarrow 0$; para $\Delta t_n/\tau_i \rightarrow \infty$ o colchete tende a 1, e $q_n \rightarrow \sum_i D_{i,n}^*$, isto é, à fluência assintótica da cadeia.

5.3 Resolução da integral II (história passada) e variáveis auxiliares $\omega_{i,n}$

Para resolver II, simplifica-se primeiro $\Delta D_{n,z}$:

$$\begin{aligned} \Delta D_{n,z} &= D(t_n, z) - D(t_{n-1}, z) \\ &= \sum_{i=1}^N D_i(z) \left[1 - e^{-(t_n - z)/\tau_i} \right] - \sum_{i=1}^N D_i(z) \left[1 - e^{-(t_{n-1} - z)/\tau_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N D_i(z) \left[-e^{-(t_n - z)/\tau_i} + e^{-(t_{n-1} - z)/\tau_i} \right]. \end{aligned}$$

Isolando o fator $e^{-(t_{n-1} - z)/\tau_i}$,

$$\Delta D_{n,z} = \sum_{i=1}^N D_i(z) e^{-(t_{n-1} - z)/\tau_i} \left[1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right],$$

pois

$$e^{-(t_n - z)/\tau_i} = e^{-(t_{n-1} - z)/\tau_i} e^{-\Delta t_n/\tau_i}.$$

A integral II fica:

$$II = \int_{t_0}^{t_{n-1}} \sum_{i=1}^N D_i(z) e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} \left[1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right] [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz.$$

Comutando soma e integral, e retirando o termo independente de z (o fator $1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i}$),

$$II = \sum_{i=1}^N \left[1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right] \{\omega_{i,n}\},$$

em que se define a variável auxiliar:

$$\{\omega_{i,n}\} = \int_{t_0}^{t_{n-1}} D_i(z) e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz.$$

Observe-se que $\{\omega_{i,n}\}$ integra a história até t_{n-1} , e não até t_n : é uma quantidade conhecida no início do passo n .

5.3.1 Relação de recorrência para $\{\omega_{i,n}\}$

No instante anterior,

$$\{\omega_{i,n-1}\} = \int_{t_0}^{t_{n-2}} D_i(z) e^{-(t_{n-2}-z)/\tau_i} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz.$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i}$,

$$\begin{aligned} \{\omega_{i,n-1}\} e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i} &= \int_{t_0}^{t_{n-2}} D_i(z) e^{-(t_{n-2}-z)/\tau_i} e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz \\ &= \int_{t_0}^{t_{n-2}} D_i(z) e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz, \end{aligned}$$

pois $t_{n-2} + \Delta t_{n-1} = t_{n-1}$.

Separando o intervalo de integração de $\{\omega_{i,n}\}$ em $[t_0, t_{n-2}]$ e $[t_{n-2}, t_{n-1}]$,

$$\begin{aligned} \{\omega_{i,n}\} &= \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} D_i(z) e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_{n-2}} D_i(z) e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} [\mathbb{V}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\} dz. \end{aligned}$$

A segunda parcela é exatamente $\{\omega_{i,n-1}\} e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i}$. Da primeira, tiram-se da integral os termos independentes de z (em particular $[\mathbb{V}]\{\Delta \sigma_{n-1}\}/\Delta t_{n-1}$ e o valor médio $D_{i,n-1}^*$), obtendo-se:

$$\{\omega_{i,n}\} = [\mathbb{V}] \frac{\{\Delta \sigma_{n-1}\}}{\Delta t_{n-1}} D_{i,n-1}^* \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} dz + \{\omega_{i,n-1}\} e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i}.$$

A primitiva de $e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i}$ é $\tau_i e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i}$. Avaliando entre t_{n-2} e t_{n-1} ,

$$\left[\tau_i e^{-(t_{n-1}-z)/\tau_i} \right]_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} = \tau_i \left(1 - e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i} \right).$$

Logo,

$$\{\omega_{i,n}\} = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_{n-1}\} D_{i,n-1}^* \frac{\tau_i}{\Delta t_{n-1}} \left(1 - e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i} \right) + \{\omega_{i,n-1}\} e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i}.$$

Esta é a *relação de recorrência*: bastam o incremento de tensão do passo anterior, o valor auxiliar anterior e os parâmetros da série de fluência. Não é necessário reintegrar desde t_0 .

Para $n = 1$, o intervalo $[t_0, t_{n-1}]$ é vazio e a integral II anula-se; consequentemente

$$\{\omega_{i,1}\} = \mathbf{0}.$$

Ressalte-se que na recorrência entram apenas os incrementos $\{\Delta\sigma_{n-1}\}$ com $n-1 \geq 1$, ou seja, a parte contínua da história. O degrau inicial $\{\Delta\sigma_0\}$ é integralmente representado pelo termo em $\Delta D_{n,0}$ e jamais é introduzido em $\{\omega_{i,n}\}$.

5.4 Expressão final de $\{\eta_n\}$ e do incremento de fluência

Reunindo o termo em $\Delta D_{n,0}$ com a integral II ,

$$\begin{aligned} \{\eta_n\} &= [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} \Delta D_{n,0} + II \\ &= [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} \sum_{i=1}^N D_i(t_0) e^{-(t_{n-1}-t_0)/\tau_i} \left(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right) \{\omega_{i,n}\}, \end{aligned}$$

em que se usou, para o primeiro somatório, a forma de $\Delta D_{n,z}$ obtida na Seção 5.3 particularizada em $z = t_0$. Note-se que as amplitudes são avaliadas na idade de aplicação do degrau, $D_i(t_0)$, e que o expoente que multiplica o parêntese é $e^{-(t_{n-1}-t_0)/\tau_i}$, com t_{n-1} (e não t_n), decisivos para a consistência verificada na Seção 6.

Com a recorrência de $\{\omega_{i,n}\}$ definida, temos finalmente:

$$\{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} = \{\eta_n\} + q_n [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_n\},$$

com

$$q_n = \sum_{i=1}^N D_{i,n}^* \left[1 - \frac{\tau_i}{\Delta t_n} \left(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i} \right) \right].$$

6. Verificação: ensaio de fluência a tensão constante

Agora, é possível aplicar a dedução incremental ao caso mais simples que é simular o próprio ensaio de fluência. A formulação apresentada tem que resultar exatamente na função de fluência considerada como dado de entrada. Mecanicamente, a fluência é o caso de um corpo de prova carregado por uma

compressão uniaxial na idade z_0 , aplicada quase instantaneamente $\Delta\sigma_0 = 1$ MPa, e mantida constante a partir de então.

6.1 Solução de referência (forma contínua)

Fazendo $t_0 \equiv z_0$ e $\partial\sigma/\partial z = 0$ para $z > z_0$, a equação da Seção 4 reduz-se ao seu primeiro termo:

$$\{\varepsilon^{cr}(t)\} = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} D(t, z_0).$$

Somando a parcela elástica instantânea, $[\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\}/E(z_0)$, a deformação total é:

$$\{\varepsilon(t)\} = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} \left[\frac{1}{E(z_0)} + D(t, z_0) \right] = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} J(t, z_0).$$

Sendo o estado uniaxial, $\{\sigma\} = \{\Delta\sigma_0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$, e sendo o termo $V_{(1,1)}$ de $[\mathbb{V}]$ igual a 1,

$$\varepsilon_{11}(t) = \Delta\sigma_0 J(t, z_0) = J(t, z_0) \times 1 \text{ MPa},$$

e nas direções transversais, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \Delta\sigma_0 J(t, z_0)$ — isto é, a fluência transversal segue o mesmo coeficiente de Poisson elástico, coerente com a hipótese adotada na Seção 2. Numericamente, com $\Delta\sigma_0 = 1$ MPa e J expresso em $10^{-6}/\text{MPa}$, a deformação axial coincide em valor com $J(t, z_0)$ que o algoritmo incremental precisa reproduzir.

6.2 Percurso do algoritmo incremental

Discretizando o tempo em passos arbitrários $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, não necessariamente iguais, e aplicando a carga na forma de degrau tem-se $\{\Delta\sigma_n\} = \mathbf{0}$ para todo $n \geq 1$. Percorrendo os três termos do incremento:

A parcela I é proporcional ao incremento corrente e, portanto, anula-se em todos os passos:

$$q_n [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_n\} = \mathbf{0}, \quad n \geq 1.$$

As variáveis auxiliares partem de $\{\omega_{i,1}\} = \mathbf{0}$ e, pela recorrência, permanecem nulas, pois a parcela que as atualiza é proporcional a $\{\Delta\sigma_{n-1}\}$, nulo para $n-1 \geq 1$:

$$\{\omega_{i,n}\} = \underbrace{[\mathbb{V}]\{\mathbf{0}\} D_{i,n-1}^* \frac{\tau_i}{\Delta t_{n-1}} \left(1 - e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i} \right)}_{= \mathbf{0}} + \underbrace{\{\omega_{i,n-1}\} e^{-\Delta t_{n-1}/\tau_i}}_{= \mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Logo $II = \mathbf{0}$ em todos os passos: o degrau inicial é considerado somente pelo termo $\Delta D_{n,0}$, e a recorrência das variáveis auxiliares não é mobilizada.

Resta, portanto, apenas o termo hereditário do degrau:

$$\{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} = \{\eta_n\} = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} \Delta D_{n,0} = [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_0\} [D(t_n, z_0) - D(t_{n-1}, z_0)].$$

6.3 Soma dos incrementos e recuperação da função de fluência

Acumulando os incrementos de $n = 1$ até um instante genérico t_k , os termos intermediários cancelam-se dois a dois:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^{cr}(t_k)\} &= \sum_{n=1}^k \{\Delta \varepsilon_n^{cr}\} = [\mathbb{V}]\{\Delta \sigma_0\} \sum_{n=1}^k [D(t_n, z_0) - D(t_{n-1}, z_0)] \\ &= [\mathbb{V}]\{\Delta \sigma_0\} [D(t_k, z_0) - D(t_0, z_0)].\end{aligned}$$

Como $t_0 = z_0$ e, pela propriedade estabelecida na Seção 3, $D(z_0, z_0) = 0$, resulta

$$\{\varepsilon^{cr}(t_k)\} = [\mathbb{V}]\{\Delta \sigma_0\} D(t_k, z_0),$$

que é exatamente a solução de referência da Seção 6.1. Somando a parcela elástica,

$$\varepsilon_{11}(t_k) = \Delta \sigma_0 J(t_k, z_0),$$

isto é, **o algoritmo recupera exatamente a própria função de fluência.**

Três aspectos merecem ser destacados. Primeiro, a coincidência é exata, e não aproximada: nenhum erro de discretização é introduzido, qualquer que seja a sequência $\{\Delta t_n\}$ adotada. Isso ocorre porque, no termo do degrau, as amplitudes são avaliadas na idade exata de carregamento, $D_i(z_0)$, e não pela quadratura de ponto médio $D_{i,n}^*$ — a aproximação de ponto médio só atua sobre a *parte contínua* do histórico, ausente neste caso. Segundo, a verificação é sensível ao expoente $e^{-(t_{n-1} - z_0)/\tau_i}$ presente em $\{\eta_n\}$, caso em que os termos intermediários cancelam-se para que o resultado recupere com exatidão a função de fluência. Terceiro, na equação constitutiva incremental da Seção 2 o módulo elástico é avaliado na idade corrente; como $\{\Delta \sigma_n\} = \mathbf{0}$ para $n \geq 1$, nenhuma outra deformação elástica é acumulada pelo envelhecimento de E , somente a parcela instantânea que permanece fixa em $1/E(z_0)$, precisamente como exige a definição $J(t, z) = 1/E(z) + D(t, z)$.

6.4 Verificação complementar: carregamento em rampa

Um segundo teste, útil porque exercita as parcelas q_n e $\{\omega_{i,n}\}$, consiste em aplicar $\Delta \sigma_1$ como rampa de taxa constante ao longo do primeiro passo $[t_0, t_1]$, mantendo a tensão constante depois. A solução exata, sob a mesma hipótese de amplitude constante no passo, é:

$$\varepsilon^{cr}(t) = \Delta \sigma_1 \sum_{i=1}^N D_{i,1}^* \left[1 - \frac{\tau_i}{\Delta t_1} \left(1 - e^{-\Delta t_1/\tau_i} \right) e^{-(t-t_1)/\tau_i} \right], \quad t \geq t_1.$$

Em $t = t_1$ a exponencial vale 1 e a expressão reduz-se a $q_1 \Delta \sigma_1$, coincidindo com o primeiro incremento fornecido pelo algoritmo. Para $t = t_2$, a diferença $\varepsilon^{cr}(t_2) - \varepsilon^{cr}(t_1)$ vale:

$$\Delta \sigma_1 \sum_{i=1}^N D_{i,1}^* \frac{\tau_i}{\Delta t_1} \left(1 - e^{-\Delta t_1/\tau_i} \right) \left(1 - e^{-\Delta t_2/\tau_i} \right) = \sum_{i=1}^N \left(1 - e^{-\Delta t_2/\tau_i} \right) \{\omega_{i,2}\},$$

com $\{\omega_{i,2}\}$ dado pela recorrência da Seção 5.3.1, e novamente, a coincidência é exata. Para $\Delta t_1 \rightarrow 0$ a rampa converge para um simples degrau e $q_1 \rightarrow 0$, recuperando o caso da Seção 6.1. Os dois modos de introduzir a *mesma* carga mecânica — degrau $\{\Delta \sigma_0\}$ (termo em $\Delta D_{n,0}$) ou rampa no primeiro passo ($\Delta \sigma_1$ via q_n e $\{\omega_{i,n}\}$) — são, portanto, consistentes entre si. Isso em nada restringe histórias em que a temperatura varie (inclusive em rampa) concomitante ao ensaio ou à aplicação da carga: a temperatura entra pelo tempo reduzido ξ e pela parcela ε^{th} , independentemente de como se represente o salto ou a rampa de tensão.

7. Formulação para elementos finitos

No início do passo n conhecem-se:

- a história de tensões até t_{n-1} (em particular $\{\Delta\sigma_{n-1}\}$ e, se houver, $\{\Delta\sigma_0\}$);
- as variáveis auxiliares $\{\omega_{i,n}\}$ atualizadas pela recorrência (ou, de modo equivalente, atualizadas *após* o passo $n-1$);
- o escalar q_n , função apenas de Δt_n e dos D_i, τ_i .

Desconhecem-se $\{\Delta\sigma_n\}$ e o incremento total de deformação. A decomposição:

$$\{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} = \{\eta_n\} + q_n [\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_n\}$$

permite tratar $\{\eta_n\}$ como uma deformação de fluência já determinada pelo histórico — no mesmo sentido dos termos hereditários da formulação de Zocher et al. — e incorporar $q_n[\mathbb{V}]$ ao operador constitutivo incremental do passo. O equilíbrio viscoelástico com envelhecimento reduz-se, a cada passo, a um problema elástico linear (ou elástico com deformações impostas), resolvido pelo método dos elementos finitos.

Não é necessário derivar de modo diferente o elemento isoparamétrico: a montagem de K e o equilíbrio nodal são os da teoria da elasticidade linear. A incrementalização altera apenas o *operador constitutivo do passo* e o vetor de deformações impostas.

Partindo da equação constitutiva da Seção 2 e da decomposição $\{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} = \{\eta_n\} + q_n[\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_n\}$, o incremento de tensão no passo n escreve-se, em forma de Voigt:

$$\{\Delta\sigma_n\} = [\mathbb{C}_n] \left(\{\Delta\varepsilon_n^{tot}\} - \{\Delta\varepsilon_n^{th}\} - \{\Delta\varepsilon_n^{aut}\} - \{\eta_n\} \right),$$

em que o operador tangente do passo,

$$[\mathbb{C}_n] = \left(\frac{1}{E_n} [\mathbb{V}] + q_n [\mathbb{V}] \right)^{-1} = \frac{E_n}{1 + q_n E_n} [\mathbb{V}]^{-1},$$

absorve a parcela $q_n[\mathbb{V}]$ da fluência (com $E_n = E(t_n)$ na escala coerente de unidades de q_n). As parcelas $\{\eta_n\}$, térmica e autógena entram como deformações impostas conhecidas no início do passo e geram o vetor de forças nodais equivalentes $F_n^{\eta, th}$. O equilíbrio no passo reduz-se a

$$K_n u_n = F_n^{\text{ext}} + F_n^{\eta, th},$$

com K_n montado a partir de $[\mathbb{C}_n]$. Obtido $\{\Delta\sigma_n\}$, atualizam-se as variáveis $\{\omega_{i,n+1}\}$ (Seção 5.3.1) e avança-se ao passo seguinte.

7.1 Comparação com Zocher et al. (1997)

A comparação com Zocher, Groves e Allen (1997) destaca três pontos:

1. **Função constitutiva de partida.** Aqueles autores partem dos *módulos de relaxação* (série de Dirichlet–Prony sobre a relaxação); neste trabalho, parte-se da *função de fluência* $D(t, z)$, que é a grandeza diretamente ligada ao ensaio de fluência do concreto.
2. **Envelhecimento.** Na formulação de Zocher et al., o envelhecimento do concreto jovem não é o objeto da representação. Já nesta, a dependência de D_i em relação à idade de carregamento z (ou ξ) é mantida em todo o histórico.
3. **Mesma estratégia numérica.** Em ambos os casos, a hipótese de taxa constante e a solução analítica da integral da série exponencial dentro do passo permitem *fechar* as integrais e obter a recorrência, eliminando o armazenamento completo da história.

Para o concreto massa sujeito a histórico de temperatura, a via da função de fluência com envelhecimento obtida por meio de ensaio é um requisito necessário: os ensaios e os modelos de ajuste

(cadeia de Kelvin com envelhecimento) fornecem $J(t, z)$ ou $D(\xi, \xi')$; a dedução acima converte essa informação em um algoritmo incremental necessário ao cálculo das tensões. Em síntese, compartilha-se com Zocher et al. a estratégia (problema elástico por passo, memória em variáveis auxiliares), com a diferença de que $[\mathbb{C}_n]$ e $\{\eta_n\}$ nascem da função de fluência com envelhecimento, e não de uma série de Dirichlet–Prony sobre a relaxação.

Convém registrar o alcance dessa mesma estrutura algébrica. Souza e Allen (2010) mostraram que a equação constitutiva incremental viscoelástica homogeneizada de um meio heterogêneo conserva a forma da equação local — operador tangente do passo mais um vetor de tensão dependente da história —, com a diferença de que ambos passam a depender do dano acumulado na escala inferior. Ou seja, o par $[\mathbb{C}_n]$, $\{\eta_n\}$ não é particularidade da fluência com envelhecimento: é a forma que a viscoelasticidade linear assume quando incrementalizada, e sobrevive à homogeneização e à evolução de microfissuras (Souza, 2009; Souza e Allen, 2011).

7.2 Observações de implementação

1. **Tempo reduzido.** Na presença de temperatura variável, os tempos de retardo τ_i e os intervalos Δt_n devem ser interpretados no tempo reduzido ξ , ou os coeficientes devem ser reavaliados com o *shift factor* a_T . A estrutura algébrica da dedução permanece inalterada.
2. **Avaliação de $D_{i,n}^*$.** A tomada no ponto médio do intervalo é a regra do ponto médio, cuja convergência global é de segunda ordem em Δt — o erro cai por um fator próximo de quatro a cada refinamento pela metade, para histórias de tensão suaves. Ainda assim, passos pequenos são necessários nas primeiras idades, quando $D_i(z)$ varia rapidamente e o próprio Δt é da ordem da escala de variação. O termo do degrau inicial, por não passar por essa quadratura, é exato (Seção 6.3).
3. **Inicialização e degrau inicial.** Em $n = 1$, $\{\omega_{i,1}\} = \mathbf{0}$. Se não houver salto $\{\Delta\sigma_0\}$ em t_0 , o termo correspondente em $\{\eta_n\}$ anula-se. O degrau, quando existir, é contabilizado exclusivamente por $\Delta D_{n,0}$ e nunca pela recorrência.
4. **Ordem de atualização.** Em cada passo, calcula-se q_n e $\{\eta_n\}$ com $\{\omega_{i,n}\}$ vindo do passo anterior, resolve-se o equilíbrio obtendo $\{\Delta\sigma_n\}$ e só então se atualiza $\{\omega_{i,n+1}\}$.
5. **Estabilidade numérica.** Para $\Delta t_n \ll \tau_i$, as expressões $1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i}$ e $1 - (\tau_i/\Delta t_n)(1 - e^{-\Delta t_n/\tau_i})$ sofrem perda de precisão por cancelamento em aritmética de ponto flutuante; convém calcular $e^x - 1$ por rotina estável para essa diferença — a rotina `expm1`, por exemplo — ou pela expansão em série do argumento pequeno.
6. **Acoplamento térmico.** A deformação térmica $\epsilon^{th} = \alpha\Delta\theta \mathbf{1}$ (isotrópica) entra na equação constitutiva incremental da Seção 2; a fluência atua sobre a história de tensões gerada pelas restrições a essa deformação (e às demais parcelas).
7. **Índice de fissuração.** Uma vez obtida a história de tensões principais, compara-se a tensão principal maior com a evolução da resistência à tração (função da maturidade). A relação com o critério clássico da capacidade de deformação é discutida na Seção 9. Trata-se de verificação, e não de modelo de fissuração: representar a passagem de microfissuras a macrofissura em meio viscoelástico exige tratamento em duas escalas com acoplamento nos dois sentidos (Souza e Allen, 2011), fora do escopo desta Parte I.

8. Validação analítico-numérica

A validação analítico-numérica a partir da formulação apresentada é exposta em dois níveis: (i) uma versão particularizada *sem* envelhecimento, no mesmo sentido dos exemplos de Zocher et al. (1997); (ii) estado plano (de tensões ou de deformações, conforme o caso) *com* envelhecimento, acrescido de carregamento cíclico e formulação no domínio da frequência, com aplicação resultante no domínio do tempo. A laje *livre* sob hidratação (campo térmico não separável) é apresentada na Seção 8.3.5; a laje *fixa* com histórico contínuo — caso típico de concreto massa e muitas vezes o mais crítico — e a comparação com os critérios de verificação são tratadas na Seção 9.2. A validação numérico-experimental será realizada posteriormente, em trabalho à parte deste, com a campanha de monitoramento e modelagem do Vertedouro Extravasador de Troncos (VET) da UHE Santo Antônio.

Para as verificações com envelhecimento adota-se a forma funcional da cadeia de Kelvin

$$D(\xi, \xi') = \sum_{i=1}^N D_i(\xi') \left[1 - e^{-(\xi - \xi')/\tau_i} \right],$$

com amplitudes dependentes da idade de carregamento,

$$D_i(\xi') = a_i + \sum_{j=1}^{M_i} b_{i,j} e^{-\xi'/c_{i,j}},$$

em que a_i é a parcela constante e os pares $(b_{i,j}, c_{i,j})$ definem as M_i exponenciais de envelhecimento da i -ésima unidade — uma, duas ou mais, conforme o ajuste exija.

Para o concreto da UHE Itumbiara (Andrade et al., 1997), usado aqui como exemplo de ajuste, adota-se o modelo $D_0 + D_1 + \text{núcleo}$: duas parcelas de envelhecimento $D_0(z)$ e $D_1(z)$, cada uma com duas exponenciais em z , e um espectro comum (τ_j, φ_j) de $M = 11$ unidades Kelvin que reproduz o núcleo logarítmico de fluência na forma adotada naquele trabalho (base $\ln$):

$$J(t, z) = D_0(z) + D_1(z) \sum_{j=1}^M \varphi_j \left[1 - e^{-(t-z)/\tau_j} \right], \quad E(z) = \frac{1}{D_0(z)},$$

com

$$D_p(z) = a_p + b_p e^{-z/c_p} + d_p e^{-z/c_{p2}}, \quad p = 0, 1.$$

Tabela 1 — Modelo de fluência da UHE Itumbiara (Andrade et al., 1997). Parâmetros em MPa; tempo em dias.

Grandeza	Equação	Parâmetro 1	Parâmetro 2	R
Módulo	$E(z) = \frac{z}{a_E z + b_E}$	$a_E = 3,619 \times 10^{-5}$	$b_E = 7,750 \times 10^{-5}$	0,993
Coefficiente de fluência	$\varphi(z) = \exp(A + B/z)$	$A = -12,420$	$B = 1,556$	0,945
Fluência	$J(t, z) = \frac{1}{E(z)} + \varphi(z) \ln(t - z + 1)$	—	—	—

Tabela 2 — Constantes adotadas nas verificações da Seção 8.

Grandeza	Valor
ν	0,20
α	$10 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Tabela 3 — Parcelas de envelhecimento $D_0(z)$ e $D_1(z)$ do ajuste $D_0 + D_1 \cdot \text{núcleo}$.

Parcela	a_p (MPa $^{-1}$)	b_p (MPa $^{-1}$)	d_p (MPa $^{-1}$)	c_p (d)	c_{p2} (d)
D_0	$3,700 \times 10^{-5}$	$5,479 \times 10^{-5}$	$1,110 \times 10^{-5}$	2,416	16,063
D_1	$2,838 \times 10^{-5}$	$4,624 \times 10^{-5}$	$6,117 \times 10^{-6}$	2,416	16,063

z (d)	$D_0(z)$ (MPa ⁻¹)	$D_1(z)$ (MPa ⁻¹)	$E(z) = 1/D_0$ (MPa)
1	$8,365 \times 10^{-5}$	$6,470 \times 10^{-5}$	11 955
3	$6,203 \times 10^{-5}$	$4,682 \times 10^{-5}$	16 120
7	$4,720 \times 10^{-5}$	$3,489 \times 10^{-5}$	21 187
28	$3,894 \times 10^{-5}$	$2,945 \times 10^{-5}$	25 681
91	$3,703 \times 10^{-5}$	$2,840 \times 10^{-5}$	27 002

As amplitudes das unidades são $D_j(z) = \varphi_j D_1(z)$, com tempos de retardo τ_j em dias. O núcleo foi discretizado com $L_{\ln} = 3,000$ décadas em τ ($\tau_1/\tau_M \approx 2,0 \times 10^{-4}$).

Tabela 4 — Espectro do núcleo logarítmico: $M = 11$ unidades de Kelvin.

j	τ_j (d)	φ_j
1	0,3099	$5,299 \times 10^{-3}$
2	0,7619	$3,488 \times 10^{-2}$
3	1,8729	$7,646 \times 10^{-2}$
4	4,6040	$1,047 \times 10^{-1}$
5	11,318	$1,193 \times 10^{-1}$
6	27,821	$1,255 \times 10^{-1}$
7	68,390	$1,286 \times 10^{-1}$
8	168,12	$1,280 \times 10^{-1}$
9	413,27	$1,401 \times 10^{-1}$
10	1 015,9	$6,710 \times 10^{-2}$
11	2 497,3	$3,274 \times 10^{-1}$

O ajuste da cadeia às curvas de $J(t, z)$ do modelo predictor reproduz o núcleo com erro relativo mediano de $9,7 \times 10^{-6}$ e $R^2 = 0,999995$. Nesta seção interessa a forma das equações e a verificação de que o algoritmo com base em $\{\eta_n\}$, q_n reproduz soluções de referência com esse modelo. O módulo de relaxação R , quando necessário, foi obtido de J pela recorrência de Bažant (1972) na forma de Sassone e Chiorino (2005) ou pelo próprio algoritmo $\{\eta_n\}$, q_n .

8.1 Caso particular sem envelhecimento (tipo Zocher et al., 1997)

Quando D_i e E são independentes da idade de carregamento, a formulação deste artigo reduz-se a uma viscoelasticidade linear clássica, partindo da fluência em vez da relaxação. Adota-se o sólido linear padrão — *standard linear solid* (SLS), material A — de Zocher, Groves e Allen (1997),

$$R(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-t/\tau_\sigma}, \quad J(t) = \frac{1}{E_0} + \left(\frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_0} \right) (1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}),$$

com $\tau_\varepsilon = \tau_\sigma E_0/E_\infty$, $E_0 = 0,5$ MPa, $E_\infty = 0,1$ MPa, $\tau_\sigma = 1$ u.t. e $\nu = 0,3$. Em todos os casos abaixo comparam-se a solução analítica (princípio de correspondência, com $1/E \rightarrow J(t)$) e a resposta numérica em que $J(t)$ é obtida pelo algoritmo $\{\eta_n\}$, q_n sob tensão unitária. O Exemplo 3 de Zocher et al. (cilindro ortotrópico) não é reproduzido.

Viga engastada com carga na ponta (Zocher, Ex. 1). Com $P(t) = P_0 [H(t) - H(t - t_1)]$,

$$w_L(t) = \frac{P_0 L^3}{3I} \left[J(t) - J(t - t_1) H(t - t_1) \right].$$

Cilindro espesso engastado em casca rígida (Zocher, Ex. 2). Pressão interna $p_0 H(t)$, $u_r(b) = 0$:

$$u_r(r, t) = p_0 \frac{a^2 b (1 + \nu)(1 - 2\nu)}{a^2 + (1 - 2\nu)b^2} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) J(t).$$

Anel fino clássico. Raio médio a , espessura $h \ll a$, pressão interna $p_0 H(t)$, estado plano de tensões ($\sigma_\theta = p_0 a/h$, $\sigma_r \approx 0$):

$$u_r(t) = \frac{p_0 a^2}{h} J(t).$$

Placa infinita com furo circular (Kirsch). Tração remota $\sigma_\infty H(t)$ em estado plano de tensões; com ν constante as tensões coincidem com as elásticas e, no bordo do furo,

$$u_r(a, t) = 3a\sigma_\infty J(t).$$

Os esquemas dos quatro casos estão na Figura 2; os parâmetros geométricos e de carregamento, na Tabela 5; as respostas, na Figura 3. Em complemento, com a mesma família SLS em escala de concreto ($E_0 = 25$ GPa, $E_\infty = 5$ GPa), a Figura 1 apresenta duas comparações: (i) R analítico com R obtido via J (recorrência de Bažant), com sobreposição das curvas em função de $t - z$ — ausência de envelhecimento; (ii) no estado plano com ΔT , a tensão via R com a formulação incremental η_n , q_n .

Tabela 5 — Parâmetros dos benchmarks isotrópicos sem envelhecimento. Unidades de comprimento em metros; tempo na unidade dos exemplos de Zocher et al. (1997).

	Viga (Ex. 1)	Cilindro engastado (Ex. 2)	Anel fino	Placa com furo
Material	A (SLS)	A (SLS)	A (SLS)	A (SLS)
E_0 (MPa)	0,5	0,5	0,5	0,5
E_∞ (MPa)	0,1	0,1	0,1	0,1
τ_σ (u.t.)	1	1	1	1
ν	0,3	0,3	0,3	0,3
Geometria	$L = 20$, $I = 1/12$	$a = 2$, $b = 4$, $r = (a + b)/2$	$a = 1$, $h = 0,05$	$a = 1$
Carregamento	$P_0 = 1$, $t_1 = 10$	$p_0 = 100$ Pa	$p_0 = 0,01$ MPa	$\sigma_\infty = 0,01$ MPa
Resposta	$w_L(t)$	$u_r(r, t)$	$u_r(t)$	$u_r(a, t)$

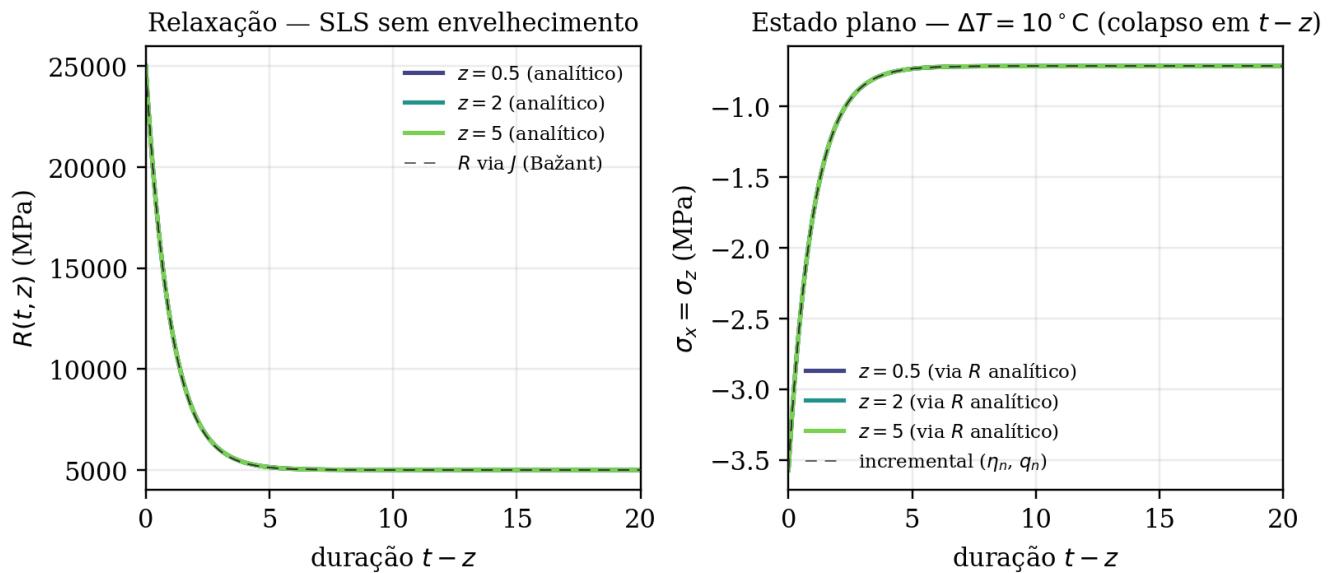
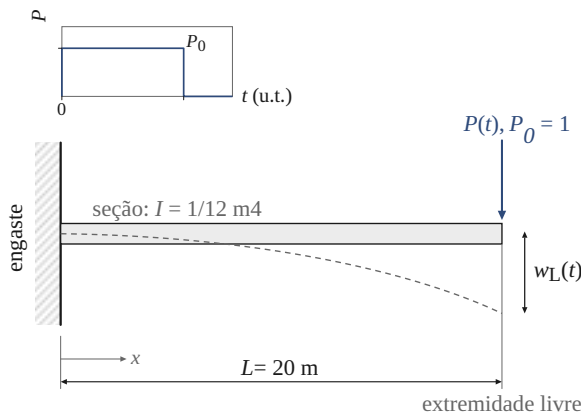


Figura 1 — Sem envelhecimento (SLS, razões Zocher, escala concreto): $R(t - z)$ e estado plano com $\Delta T = 10^\circ \text{C}$ — sobreposição das curvas em $t - z$; tracejado: incremental.

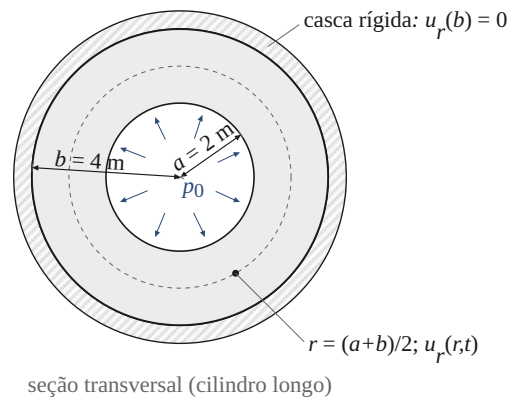
(a) Viga engastada com carga na extremidade

Benchmark sem envelhecimento — Zocher, Groves e Allen (1997), Ex. 1



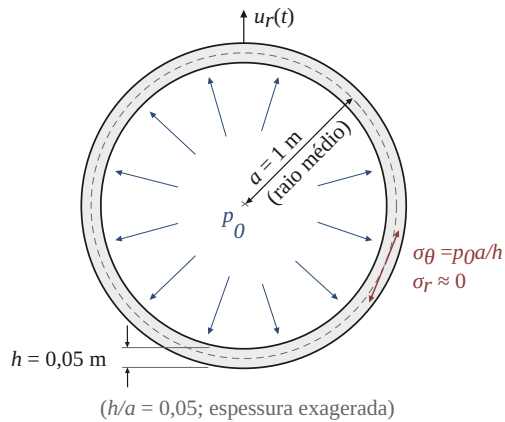
(b) Cilindro espesso em casca rígida

Benchmark sem envelhecimento — Zocher, Groves e Allen (1997), Ex. 2



(c) Anel fino sob pressão interna

Benchmark sem envelhecimento — solução clássica (estado plano de tensões)



(d) Placa infinita com furo circular (Kirsch)

Benchmark sem envelhecimento — tração remota, estado plano de tensões

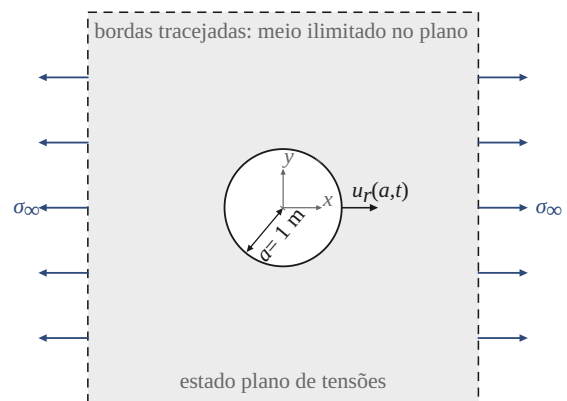


Figura 2 — Esquemas dos benchmarks isotrópicos sem envelhecimento (material A): (a) viga; (b) cilindro engastado; (c) anel fino; (d) placa com furo.

(a) **Viga.** Geometria: $L = 20$ m; $I = 1/12 \text{ m}^4$ (seção unitária). Contorno: engaste em $x = 0$ ($w = w' = 0$); extremidade $x = L$ livre. Carregamento: $P(t) = P_0 [H(t) - H(t - t_1)]$, $P_0 = 1$, $t_1 = 10$. Material: A (SLS): $E_0 = 0,5$ MPa, $E_\infty = 0,1$ MPa, $\tau_\sigma = 1$ u.t., $\nu = 0,3$. Resposta: $w_L(t) = (P_0 L^3 / 3I) [J(t) - J(t - t_1)H(t - t_1)]$.

(b) **Cilindro engastado.** Geometria: raio interno $a = 2$ m; raio externo $b = 4$ m; $r = (a + b)/2 = 3$ m (ponto de leitura). Contorno: $\sigma_r(a) = -p_0 H(t)$; $u_r(b) = 0$ (casca rígida). Carregamento: pressão interna $p_0 = 100$ Pa, aplicada em degrau em $t = 0$ e mantida. Material: A (SLS), mesmos parâmetros de (a). Resposta: $u_r(r, t) = p_0 \frac{a^2 b (1 + \nu)(1 - 2\nu)}{a^2 + (1 - 2\nu)b^2} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) J(t)$.

(c) **Anel fino.** Geometria: raio médio $a = 1$ m; espessura $h = 0,05$ m ($h/a = 0,05$). Contorno: pressão interna $p_0 H(t)$ na face interna; face externa livre; estado plano de tensões. Carregamento: $p_0 = 0,01$ MPa, em degrau em $t = 0$ e mantida. Material: A (SLS), mesmos parâmetros de (a). Resposta: $\sigma_\theta = p_0 a / h$ (constante); $u_r(t) = (p_0 a^2 / h) J(t)$.

(d) **Placa com furo.** Geometria: placa infinita no plano, furo circular de raio $a = 1$ m. Contorno: bordo do furo livre ($\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ em $r = a$); tração uniforme σ_∞ no infinito. Carregamento: $\sigma_\infty H(t)$, $\sigma_\infty = 0,01$ MPa, em degrau em $t = 0$ e mantida. Material: A (SLS), mesmos parâmetros de (a). Resposta: tensões iguais às elásticas (ν constante); $u_r(a, t) = 3a\sigma_\infty J(t)$.

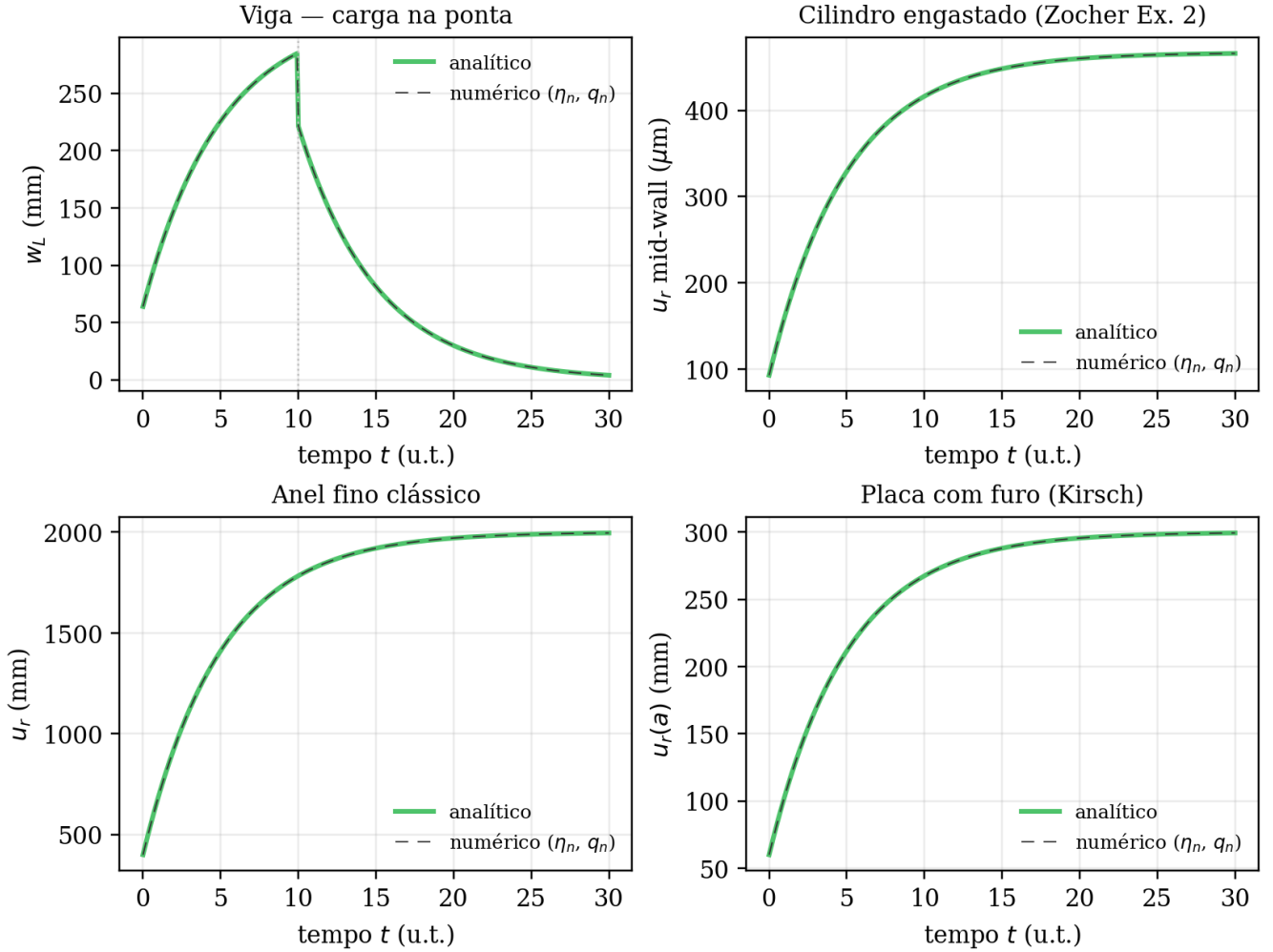


Figura 3 — Benchmarks isotrópicos sem envelhecimento (material A): viga; cilindro engastado; anel fino; placa com furo. Contínuo: correspondência analítica; tracejado: J via η_n, q_n .

8.2 Estado plano de deformações com ΔT uniforme (com envelhecimento)

Nesse problema clássico, o elemento sofre variação uniforme de temperatura ΔT no tempo, com deslocamentos impedidos em x e z e livre em y . A solução viscoelástica correspondente à solução elástica com o módulo de elasticidade substituído pelo módulo de relaxação (Zhu, 2014) é:

$$\sigma_x = \sigma_z = -R(t, z) \frac{\alpha \Delta T}{1 - \nu}, \quad \varepsilon_y = (1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{1 - \nu},$$

em que z é a idade de aplicação do salto térmico e $R(t, z)$ é o módulo de relaxação uniaxial. A expressão acima é a resposta *analítica* do problema, a partir do princípio da correspondência elástica-viscoelástica, uma vez conhecido R ; requer o cálculo numérico de R a partir da fluência.

8.2.1 Relaxação a partir da fluência (Bažant; Sassone e Chiorino)

O módulo de relaxação $R(t, z)$ e a função de fluência $J(t, z)$ não são cada um o inverso algébrico do outro. Do mesmo modo quando não há envelhecimento, obtém-se R por integração numérica da identidade integral que liga as duas funções, na forma da recorrência de Bažant (1972), tal como revisitada e apresentada por Sassone e Chiorino (2005). Em essência, impõe-se um degrau unitário de deformação na idade z e resolve-se, passo a passo, a história de tensão $\sigma(t) = R(t, z)$ compatível com:

$$\varepsilon(t_n) = \sum_{j=0}^n J(t_n, t_j) \Delta \sigma_j = 1 \quad (t_n \geq z),$$

de onde se isola $\Delta \sigma_n$ em cada instante da malha. As Figuras 4 e 5 resultam dessa recorrência, aplicada sobre a mesma $J = 1/E + D$ da cadeia de Kelvin com envelhecimento. Como, com envelhecimento, não há interconversão analítica entre J e R , as restrições termodinâmicas admissíveis ao material só podem ser impostas pela escolha da família de J ; o módulo de relaxação resultante é consequência numérica dessa escolha, e não objeto de um segundo ajuste independente.

8.2.2 Comparação com o algoritmo incremental

Com $R(t, z)$ disponível, a tensão restringida $\sigma_x = \sigma_z$ segue da expressão analítica acima. Em paralelo, integra-se a mesma história pelo algoritmo $\{\Delta \varepsilon_n^{cr}\} = \{\eta_n\} + q_n[V]\{\Delta \sigma_n\}$ das Seções 4–5, impondo deformação mecânica constante após o salto térmico (relaxação sob restrição). A comparação é feita para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ aplicado nas idades $z = 1, 3, 7, 28$ e 91 dias, com a escala de idade desde $t = 0$. Em todos os casos, a curva analítica (via R) e a incremental (η_n, q_n) coincidem no limite da discretização, evidência da correta implementação também com envelhecimento.

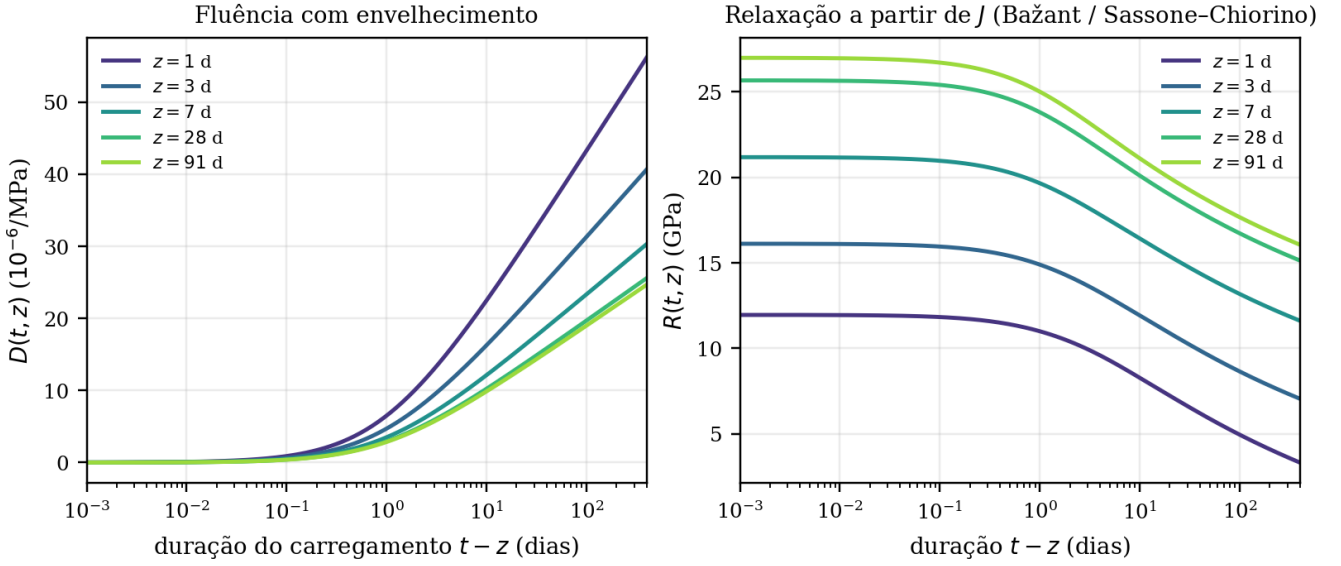


Figura 4 — Fluência com envelhecimento $D(t, z)$ e módulo de relaxação $R(t, z)$ para idades de carregamento $z = 1, 3, 7, 28$ e 91 dias.

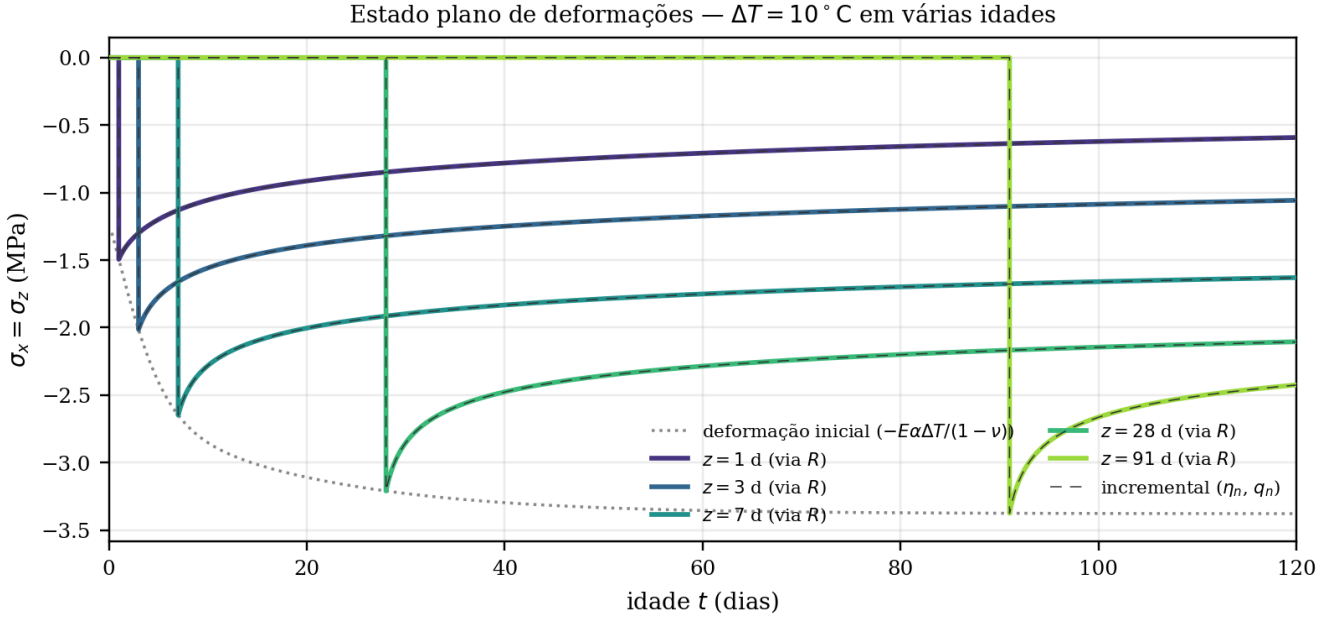


Figura 5 — Estado plano de deformações com $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em várias idades z : cálculo via R e formulação incremental η_n, q_n ; tensão da deformação inicial $-E(t) \alpha \Delta T / (1 - \nu)$ (pontilhado).

8.3 Campos com solução termoelástica conhecida

Os casos das Seções 8.1 e 8.2 são problemas unidimensionais variando no tempo. Interessa também verificar o procedimento sobre campos 2D e 3D, isto é, sobre problemas em que a tensão varia de ponto a ponto. Há uma família de problemas termoelásticos em que isso se faz sem integrar a estrutura inteira, e convém delimitá-la antes de apresentar os casos.

Condição de separabilidade. Considere-se o corpo homogêneo, com ν elástico constante, cuja temperatura, medida a partir do estado sem tensão no instante t_0 , se escreva na forma

$$T(x, t) = \theta(t) h(x),$$

com h fixo no espaço. A tensão termoelástica correspondente é

$$\sigma_{ij}^e(x, t) = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \theta(t) g_{ij}(x),$$

em que g_{ij} depende apenas da geometria, de h e de ν , e não do módulo de elasticidade. Nessa condição, a história de tensões em cada ponto é proporcional à mesma função do tempo, e o problema viscoelástico com envelhecimento reduz-se a um único problema hereditário escalar:

$$\sigma_{ij}(x, t) = g_{ij}(x) S(t),$$

com S obtido da deformação impedida $\varepsilon^*(t) = \alpha\theta(t)/(1 - \nu)$. É a mesma aplicação das estruturas de deformação proporcional de Zhu (Seção 9.3): fixada a forma espacial, a resposta viscoelástica é obtida a partir da resposta elástica sem integração ponto a ponto.

Duas observações delimitam o alcance da solução. A primeira é que a condição recai sobre a *forma* de T , e não sobre sua amplitude: se se considera o campo de hidratação variável com o ponto (com o histórico $T(t)$ de cada ponto), não pertencem a esta família e são tratados na Seção 8.3.5. A segunda é que a independência de g_{ij} em relação a E exige material homogêneo; dois concretos de rigidezes distintas, ou fundação mais concreto em conjunto também não pertencem a esta família.

8.3.1 Verificação com avaliação de g_{ij}

Quatro campos foram adotados, todos com solução termoelástica fechada, em que nos dois primeiros, h é o modo fundamental da equação do calor (forma espacial que decai sem se alterar, com λ fixado pela própria geometria). A solução térmica corresponde à hipótese de ‘forma fixa’. Para o cilindro maciço longo de raio b , com $h(r) = J_0(\mu_1 r/b)$ e μ_1 a primeira raiz de J_0 , valem as expressões de Timoshenko e Goodier (1970, §151):

$$g_r = \frac{1}{b^2} \int_0^b h r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r h r dr, \quad g_\theta = \frac{1}{b^2} \int_0^b h r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r h r dr - h, \quad g_z = \frac{2}{b^2} \int_0^b h r dr - h.$$

Para a esfera maciça, com $h(r) = \text{sinc}(\pi r/b)$, as expressões correspondentes são as de Timoshenko e Goodier (1970, §152). O terceiro campo é o cilindro oco em regime permanente, $h(r) = \ln(b/r)/\ln(b/a)$, que é o caso do tubo de refrigeração e do revestimento de túnel; tem forma fechada,

$$g_\theta = \frac{1}{2\ln(b/a)} \left[1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right],$$

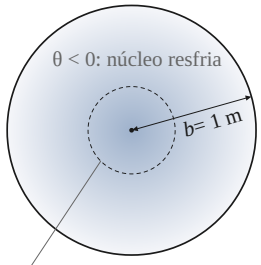
com g_r obtido pela troca do termo 1 por zero e de $(1 + b^2/r^2)$ por $(1 - b^2/r^2)$. O quarto é a inclusão esférica de raio a com ΔT uniforme em meio infinito do mesmo material, que representa o bloco lançado contra concreto antigo: dentro, o estado é hidrostático com $g_r = g_\theta = g_\varphi = -2/3$; fora, $g_r = -\frac{2}{3}(a/r)^3$ e $g_\theta = g_\varphi = \frac{1}{3}(a/r)^3$.

Os mapas foram verificados antes de serem usados, cada um pelo recurso que o próprio caso oferece. Para o cilindro e a esfera confirmaram-se as condições de contorno e de equilíbrio, $\sigma_r(b) = 0$ e resultante nula de σ_z na seção. Para o cilindro oco, a integração numérica das expressões gerais foi comparada à forma fechada acima, com desvio relativo de 5×10^{-8} . Para a inclusão, os valores dentro e fora coincidem com a solução clássica. Os esquemas dos quatro casos estão na [Figura 6](#); a [Figura 7](#) reúne os quatro núcleos espaciais g_{ij} ; a validação viscoelástica com mapas de contorno está na [Figura 8](#).

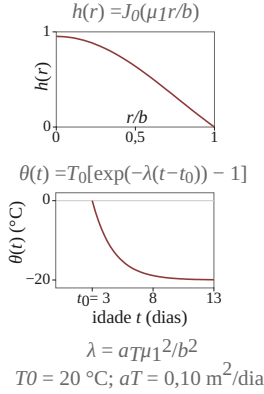
(a) Cilindro maciço longo — no modo fundamental

Campo separável $T(x,t) = \theta(t) h(r)$, com envelhecimento (Seção 8.3)

$\sigma_r(b) = 0$; $T = 0$ na superfície



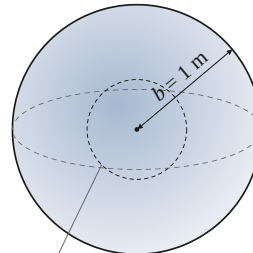
extremidades livres: $\int \sigma_z dA = 0$
corte: $r/b = 0,35$



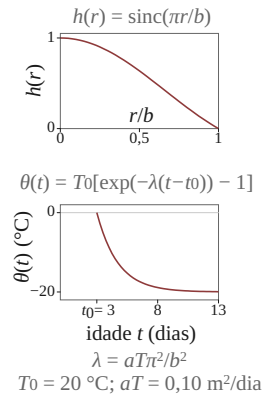
(b) Esfera maciça — resfriamento no modo fundamental

Campo separável $T(x,t) = \theta(t) h(r)$, com envelhecimento (Seção 8.3)

$\sigma_r(b) = 0$; $T = 0$ na superfície



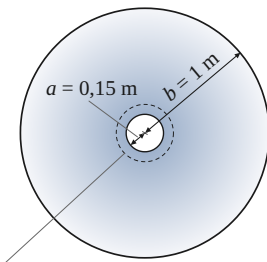
simetria esférica: $\sigma_\theta = \sigma_\phi$
corte: $r/b = 0,40$



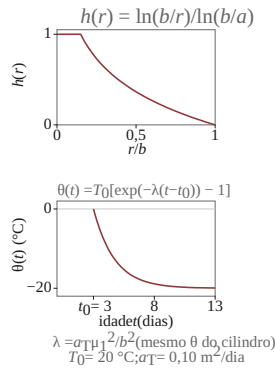
(c) Cilindro oco — gradiente permanente logarítmico

Campo separável $T(x,t) = \theta(t) h(r)$, com envelhecimento (Seção 8.3)

$\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$



extremidades livres
 $h = 1$ em $r = a$, $h = 0$ em $r = b$
corte: $r/b = 0,23$



(d) Inclusão esférica — tensão elástica mantida (σ)

Campo separável, com envelhecimento (Seção 8.3) — bloco lançado contra concreto antigo

fora: $\Delta T = 0$ (só na definição de σ_0)

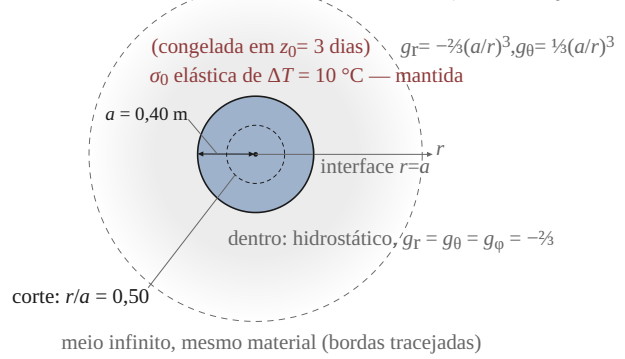


Figura 6 — Esquemas dos quatro campos separáveis: (a) cilindro maciço; (b) esfera maciça; (c) cilindro oco; (d) inclusão esférica.

(a) Cilindro maciço. Geometria: cilindro maciço longo de raio $b = 1$ m (seção transversal); corte de leitura em $r/b = 0,35$. Contorno: superfície livre, $\sigma_r(b) = 0$; resultante axial nula, $\int \sigma_z dA = 0$; $T = 0$ na superfície (referência t_0). Cond. inicial: estado sem tensão em $t_0 = 3$ dias; $T(r,t) = \theta(t) h(r)$, $\theta(t) = T_0[\exp(-\lambda(t-t_0)) - 1]$, $T_0 = 20$ °C. Material: $\nu = 0,20$; $\alpha = 10 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$; $E(z)$ e $D(t,z)$ da cadeia de Kelvin com envelhecimento (UHE Itumbiara). Resposta: $\sigma_\theta(r,t) = g_\theta(r) S(t)$, com S obtido de $\varepsilon^*(t) = \alpha\theta(t)/(1-\nu)$ pelo algoritmo incremental.

(b) Esfera maciça. Geometria: esfera maciça de raio $b = 1$ m; corte de leitura em $r/b = 0,40$. Contorno: superfície livre, $\sigma_r(b) = 0$; $T = 0$ na superfície (referência t_0). Cond. inicial: estado sem tensão em $t_0 = 3$ dias; $T(r,t) = \theta(t) h(r)$, $\theta(t) = T_0[\exp(-\lambda(t-t_0)) - 1]$, $T_0 = 20$ °C. Material: $\nu = 0,20$; $\alpha = 10 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$; $E(z)$ e $D(t,z)$ da cadeia de Kelvin com envelhecimento (UHE Itumbiara). Resposta: $\sigma_\theta(r,t) = g_\theta(r) S(t)$ (Timoshenko e Goodier, §152), S pelo algoritmo incremental.

(c) Cilindro oco. Geometria: cilindro oco longo, $a = 0,15$ m, $b = 1$ m (tubo de refrigeração, túnel); corte em $r/b = 0,23$. Contorno: faces interna e externa livres, $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$; extremidades livres. Cond. inicial: sem tensão em $t_0 = 3$ dias; $h(r) = \ln(b/r)/\ln(b/a)$ permanente, com o mesmo $\theta(t)$ do cilindro maciço. Material: $\nu = 0,20$; $\alpha = 10 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$; $E(z)$ e $D(t,z)$ da cadeia de Kelvin com envelhecimento (UHE Itumbiara). Resposta: $\sigma_\theta(r,t) = g_\theta(r) S(t)$, g_θ em forma fechada (Seção 8.3.2); tração máxima na parede interna.

(d) Inclusão esférica. Geometria: inclusão esférica de raio $a = 0,40$ m em meio infinito do mesmo material; corte em $r/a = 0,50$. Contorno: continuidade de u_r e σ_r na interface $r = a$; tensões nulas no infinito. Carregamento: em $z_0 = 3$ dias congela-se σ elástica de $\Delta T = 10$ °C na esfera ($\Delta T = 0$ fora) e mantém-se σ . Material: $\nu = 0,20$; $\alpha = 10 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$; $E(z)$ e $D(t,z)$ da cadeia de Kelvin com envelhecimento (UHE Itumbiara). Resposta: σ constante; $\varepsilon_\theta(r,t) = \sigma_\theta(r) J(t, z_0)$.

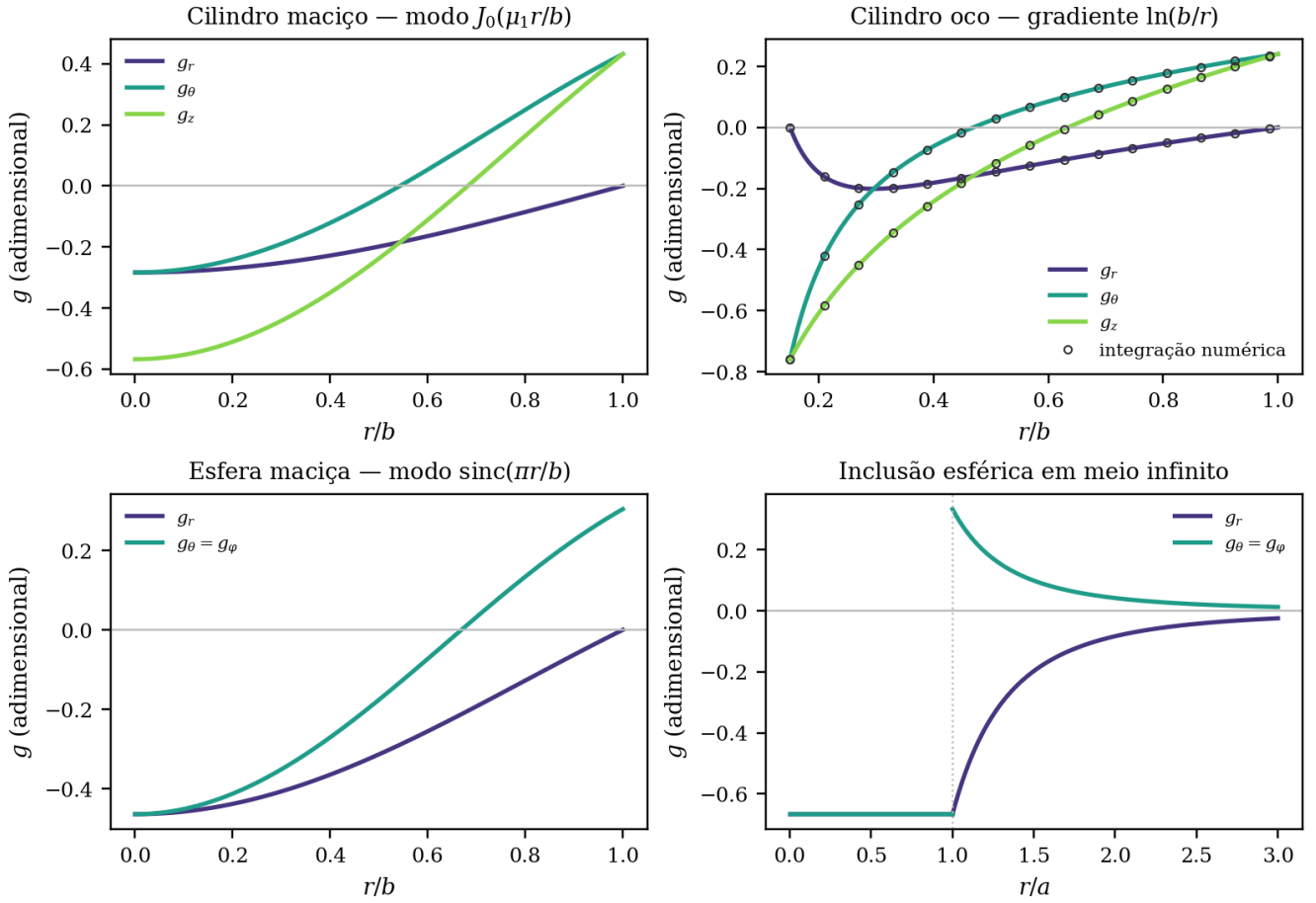


Figura 7 — Mapas g_{ij} dos quatro campos separáveis: cilindro maciço e esfera maciça no modo fundamental, cilindro oco em regime permanente e inclusão esférica em meio infinito. No cilindro oco, os marcadores são a integração numérica das expressões gerais sobre a forma fechada.

8.3.2 Validação com mapas de contorno

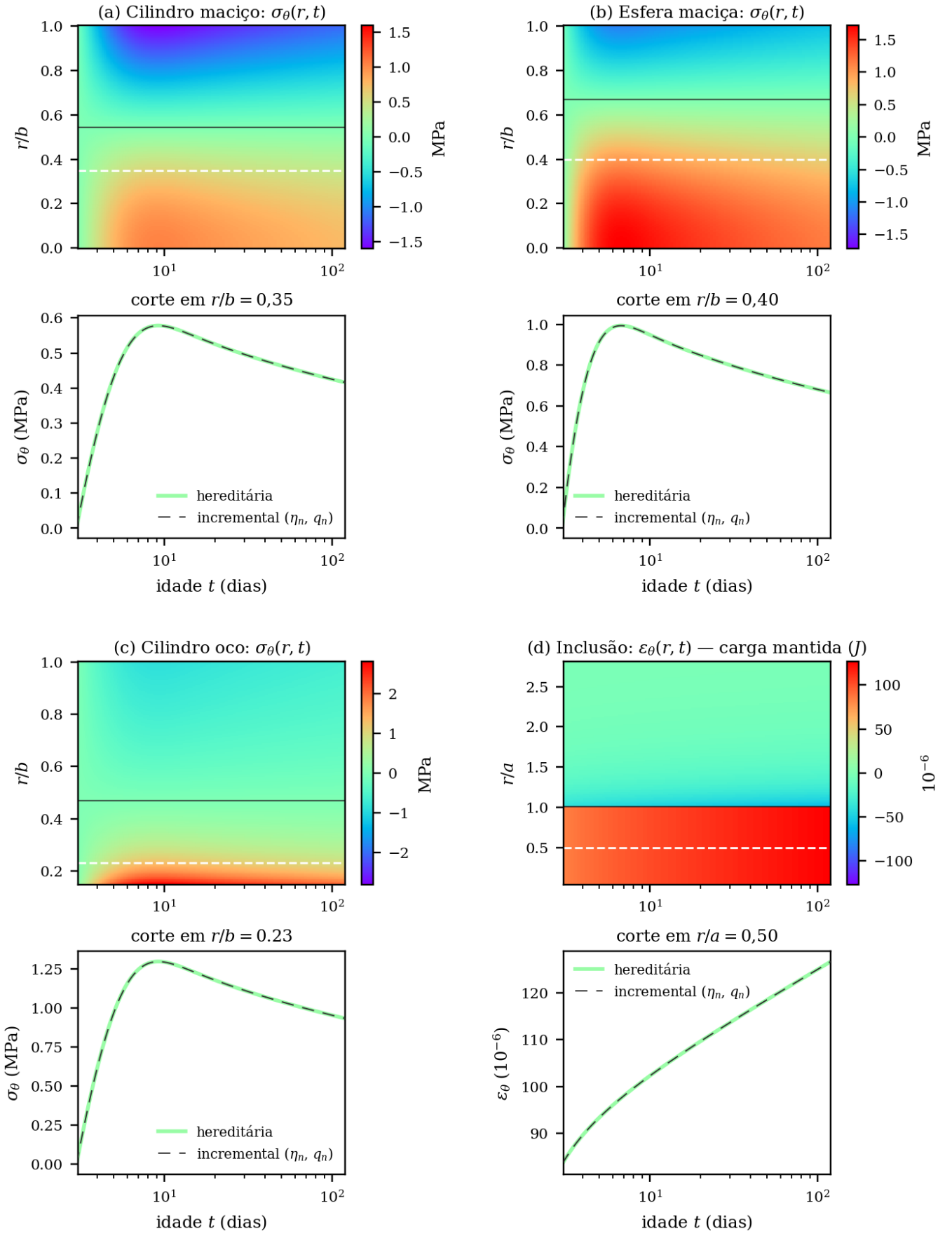
A [Figura 8](#) responde a uma pergunta distinta da [Figura 7](#). Os mapas g_{ij} confirmam a geometria elástica; aqui verifica-se se o algoritmo incremental (η_n , q_n) reproduz, em cada ponto e instante, a resposta viscoelástica com envelhecimento quando o campo térmico é separável. Em termos da Seção 8.3.1, impõe-se a deformação mecânica $\varepsilon^*(t) = \alpha\theta(t)/(1-\nu)$ — contrapartida de substituir E por R no problema restrito — e compara-se $S(t)$ obtido pela integral hereditária com o mesmo fator calculado incrementalmente; o campo completo é $\sigma_{ij} = g_{ij}S(t)$. No quarto painel a pergunta é outra: congela-se a tensão elástica de z_0 (controle de tensão) e deixa-se a deformação crescer com $J(t, z_0)$ — ensaio que recupera J em estado triaxial, distinto da relaxação que seguiria se se mantivesse o degrau térmico.

As quatro geometrias são as da Seção 8.3.2, com escala $b = 1$ m. O cilindro maciço longo e a esfera maciça têm superfície externa livre de tensão, $\sigma_r(b) = 0$, e resultante nula de σ_z na seção; o perfil radial $h(r)$ é o modo fundamental da equação do calor, com $T = 0$ na superfície em relação ao instante de referência. O cilindro oco tem raio interno $a = 0,15$ m, extremidades livres e perfil permanente $h(r) = \ln(b/r)/\ln(b/a)$. A inclusão esférica tem raio $a = 0,40$ m em meio infinito do mesmo material.

Nos três primeiros casos, adota-se estado inicial sem tensão em $t_0 = 3$ dias e resfriamento $\theta(t) = T_0[\exp(-\lambda(t - t_0)) - 1]$, com $T_0 = 20^\circ\text{C}$ e λ fixado pela difusividade $a_T = 0,10 \text{ m}^2/\text{dia}$ e pelo modo térmico de cada corpo ($\lambda = a_T\mu_1^2/b^2$ no cilindro, $\lambda = a_T\pi^2/b^2$ na esfera; no oco, usa-se o mesmo $\theta(t)$ com $h(r)$ permanente). Na inclusão, na idade $z_0 = 3$ dias, congela-se a tensão elástica correspondente a $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ na esfera e mantém-se essa tensão (controle de tensão, não o degrau térmico). O material é a cadeia de Kelvin com envelhecimento da Seção 8.2 ($\nu = 0,20$, $\alpha = 10 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $E(z)$ e $D(t, z)$ da UHE Itumbiara).

Em cada painel, o mapa colorido traz $\sigma_\theta(r, t)$ calculado pelo algoritmo incremental (MPa) nos três casos térmicos, ou $\varepsilon_\theta(r, t)$ (10^{-6}) na inclusão; o eixo vertical é a coordenada radial normalizada (r/b ou r/a), o horizontal é a idade t em escala logarítmica. A linha tracejada branca indica o raio do corte; abaixo, o perfil compara referência hereditária (contínua) e incremental (tracejada). O desvio relativo máximo fica em 10^{-3} nos três campos de tensão e em 10^{-15} na deformação da inclusão.

No cilindro maciço, o núcleo resfria e vai à tração; a curva $\sigma_\theta = 0$ permanece fixa em $r/b \simeq 0,55$ — assinatura da separabilidade. Na esfera, o padrão radial é distinto, mas a mesma lógica se aplica. No cilindro oco, a tração concentra-se na parede interna. Na inclusão, a linha pontilhada marca a interface $r = a$; no corte $r/a = 0,50$, ε_θ cresce com $J(t, z_0)$ sob tensão mantida.



8.3.3 Torção de cilindro — carregamento mecânico

Fora da família separável $g_{ij}S(t)$, o primeiro teste complementar é puramente mecânico, sem variação de temperatura ($\Delta T = 0$). Adota-se cilindro de raio externo $R = 0,5$ m e material da Seção 8.2. O teste percorre a diagonal de cisalhamento de $[\mathbb{V}]$, ausente nos quatro benchmarks térmicos, e resguarda a montagem da roseta da Parte II.

Caso 1 — giro mantido. Impõe-se ϕ/L constante a partir de $z_0 = 3$ dias. A referência é $\tau(r, t) = r(\phi/L)R(t, z_0)/[2(1 + \nu)]$. A Figura 9 traz os cortes em $r = R$ e $r = 0,25$ m e o mapa $\tau(r, t)$. O algoritmo reproduz a referência com diferença de $8,6 \times 10^{-4}$ em ambos os cortes.

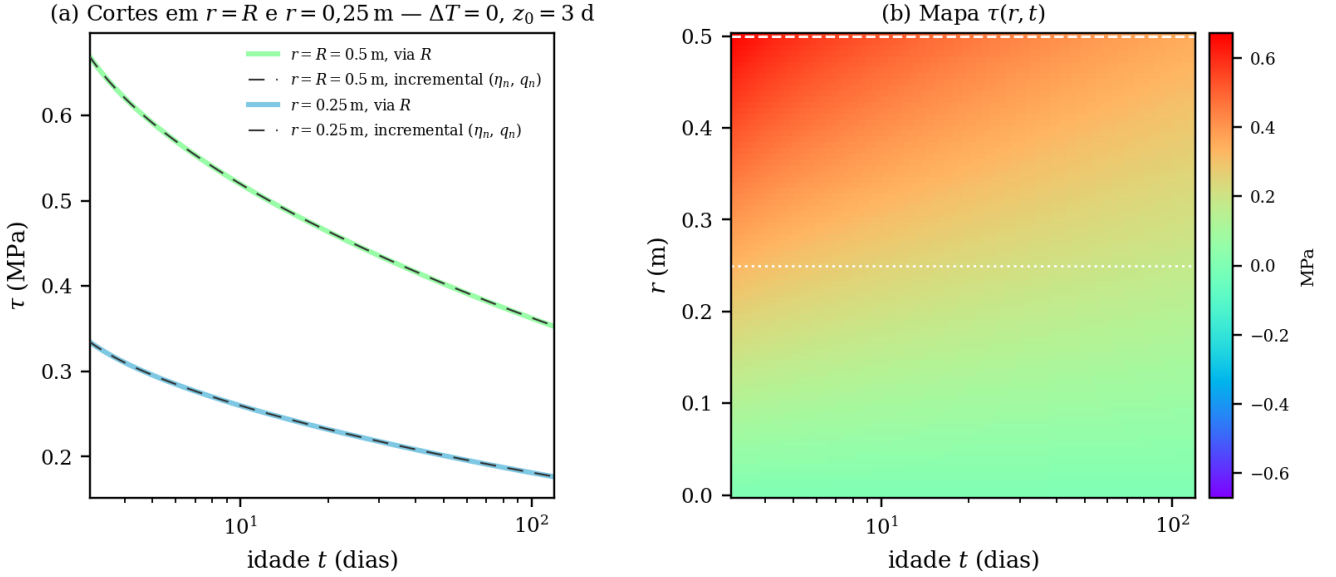


Figura 9 — Torção de cilindro, Caso 1 ($R = 0,5$ m, $\Delta T = 0$, $z_0 = 3$ d): (a) cortes $\tau(t)$ em $r = R$ e $r = 0,25$ m; (b) mapa $\tau(r, t)$.

Caso 2 — giro harmônico. Mantêm-se R , ϕ_0/L e o material. O carregamento impõe, a partir da idade z_0 ,

$$\frac{\phi(t)}{L} = \frac{\phi_0}{L} [1 + \kappa \sin \omega(t - z_0)], \quad \kappa = 0,25, \quad \omega = 2\pi \text{ rad/d } (T = 1 \text{ d}),$$

rodado em $z_0 = 3$ dias (mesma idade do Caso 1) e em $z_0 = 28$ dias. Com $J^*(\omega, z) = J'(\omega, z) - iJ''(\omega, z)$ da cadeia de Kelvin,

$$J'(\omega, z) = \frac{1}{E(z)} + \sum_{i=1}^N \frac{D_i(z)}{1 + \omega^2 \tau_i^2}, \quad J''(\omega, z) = \sum_{i=1}^N \frac{D_i(z) \omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2},$$

e $G^*(\omega, z) = 1/[2(1 + \nu)J^*]$, a referência quasi-estacionária escreve-se

$$\tau(r, t) = r \frac{\phi_0}{L} \frac{R(t, z_0)}{2(1 + \nu)} + r \frac{\phi_0}{L} \kappa [G'(\omega, t) \sin \omega(t - z_0) + G''(\omega, t) \cos \omega(t - z_0)],$$

com G' e G'' avaliados na idade corrente t , e não congelados em z_0 . A Figura 10 traz, para cada idade, os últimos cinco ciclos em $r = R$ e o mapa $\tau(r, t)$. A amplitude e a fase do histórico incremental são extraídas por detecção síncrona com rejeição de deriva — a parcela média relaxa via $R(t, z_0)$ e não é constante na janela — e comparadas com $|G^*|$ e δ no centro da janela de leitura. Reporta-se também o

número de Struik $S = T/z$ nessa janela. Em $z_0 = 28$ dias ($S = 0,025$), $e_A = -3,7 \times 10^{-5}$ e $e_\phi = 0,013^\circ$; em $z_0 = 3$ dias ($S = 0,069$), $e_A = -7,8 \times 10^{-4}$ e $e_\phi = 0,044^\circ$. O algoritmo incremental e a referência quasi-estacionária ficam sobrepostos; o ensaio cíclico expõe desvio de fase e acúmulo temporal na integração de $\omega_{i,n}$ que o Caso 1, monótono, não revela.

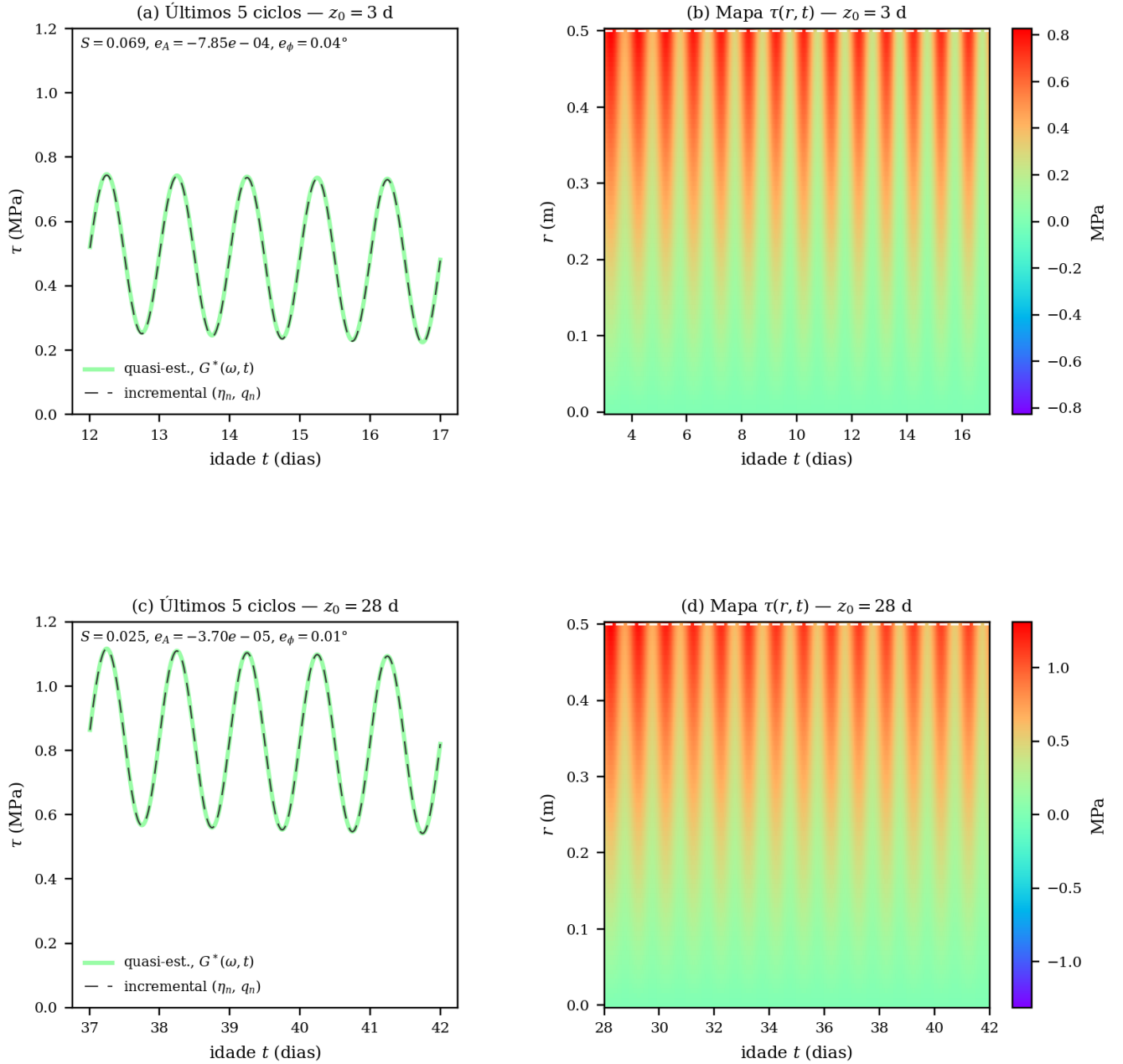


Figura 10 — Torção de cilindro, Caso 2 ($R = 0,5$ m, $\kappa = 0,25$, $T = 1$ d): (a,b) $z_0 = 3$ d; (c,d) $z_0 = 28$ d — cortes em $r = R$ e mapas $\tau(r, t)$.

8.3.4 Laje livre sob hidratação — campo não separável

O segundo teste complementar é puramente térmico e oposto em estrutura ao anterior. A solicitação é $T(y, t)$ calculado por diferenças finitas (espessura $L = 1,5$ m, geração adiabática decrescente, convecção nas faces). Como o perfil $T(y, \cdot)$ muda de sinal entre aquecimento e resfriamento, não há separabilidade $T = \theta(t)h(y)$; a resposta só se obtém integrando passo a passo, com seção plana e resultante nula de força e de momento a cada instante — laje *livre*, distinta da laje *fixa* da Seção 9.2, que usa outro modelo térmico ($L = 3$ m, função de Hill) e restrição $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. A [Figura 11](#) traz os mapas de $T(y, t)$ e $\sigma_1(y, t)$ e, abaixo de cada um, o corte em $y = 0$. No painel de tensões, a referência hereditária por superposição com $R(t, t_k)$ e a resposta incremental aparecem sobrepostas (diferença de $3,4 \times 10^{-3}$ no pico). Há tração na superfície e compressão no núcleo após o pico térmico (máximo de $1,0$ MPa na

face). O solver foi verificado separadamente com $T(y, t) = \theta(t)\cos(\pi y/L)$, caso separável com referência analítica (diferença de $1,5 \times 10^{-3}$ no pico).

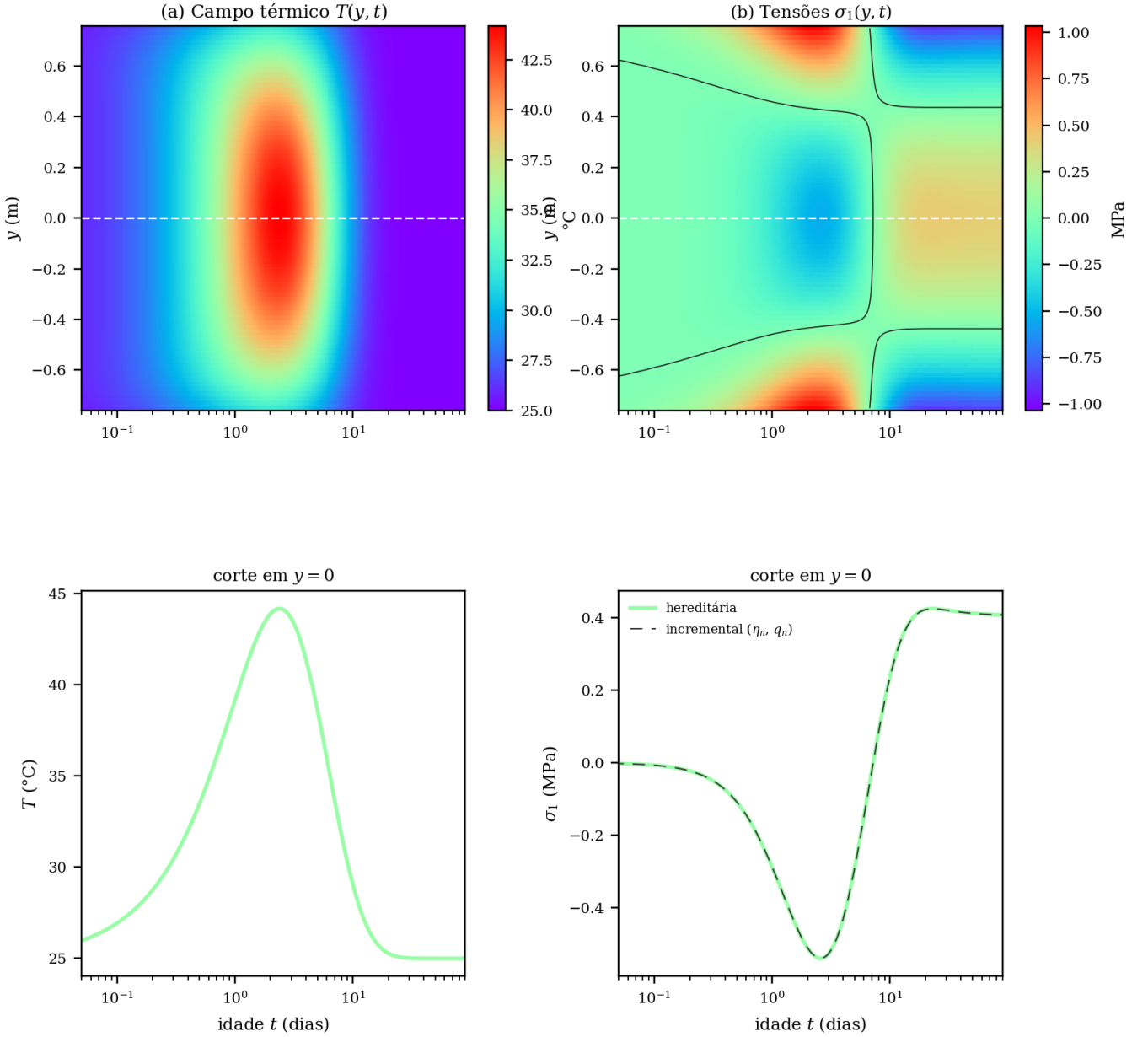


Figura 11 — Laje livre sob hidratação ($L = 1,5$ m): (a) $T(y, t)$ e (b) $\sigma_1(y, t)$; abaixo, cortes em $y = 0$ (hereditária via $R \times$ incremental no painel de tensões).

Refinando a malha de tempo uniformemente nos dois casos, o erro do algoritmo cai com ordem próxima de dois quando o carregamento começa em idade avançada — 1,8 para $z_0 = 7$ dias e 2,1 para $z_0 = 28$ dias —, mas cai apenas com ordem 1,1 quando começa em $z_0 = 1$ dia. O erro máximo localiza-se sempre no primeiro passo após o carregamento. É a confirmação numérica do que se registrou na Seção 7.2: nas primeiras idades, $D_i(z)$ e $E(z)$ variam na escala do próprio passo, e a regra do ponto médio perde a ordem.

8.4 Furo cilíndrico sob tensões remotas

Os casos anteriores são todos térmicos e, por isso, verificam a formulação de um só lado. Convém fechar a validação com um caso em que $\Delta T = 0$ e o carregamento é mecânico e mantido, porque aí vale o Teorema I de Zhu (2014, §6.4): as tensões *não* são afetadas pela fluência, e é a deformação que cresce, em qualquer ponto, pelo fator $1 + E(\tau_0)C(t, \tau_0)$. É o outro lado da moeda em relação à Seção 8.2, e amarra diretamente com a instrumentação da Parte II.

O problema é o do furo cilíndrico de raio a aberto em meio infinito submetido a um tensor de tensões remoto, resolvido por Hiramatsu e Oka (1962) para estado triaxial. Trata-se do Kirsch generalizado para um corpo tridimensional, em estado de deformação plana ao longo do furo, com a contribuição própria daqueles autores no acoplamento axial: a componente σ_ζ na parede depende de ν e das tensões remotas transversais. Ruggeri e Gomes (2013) reescreveram a solução em forma matricial, na notação adotada aqui. Com $\eta = a/r$ e θ medido no plano da seção,

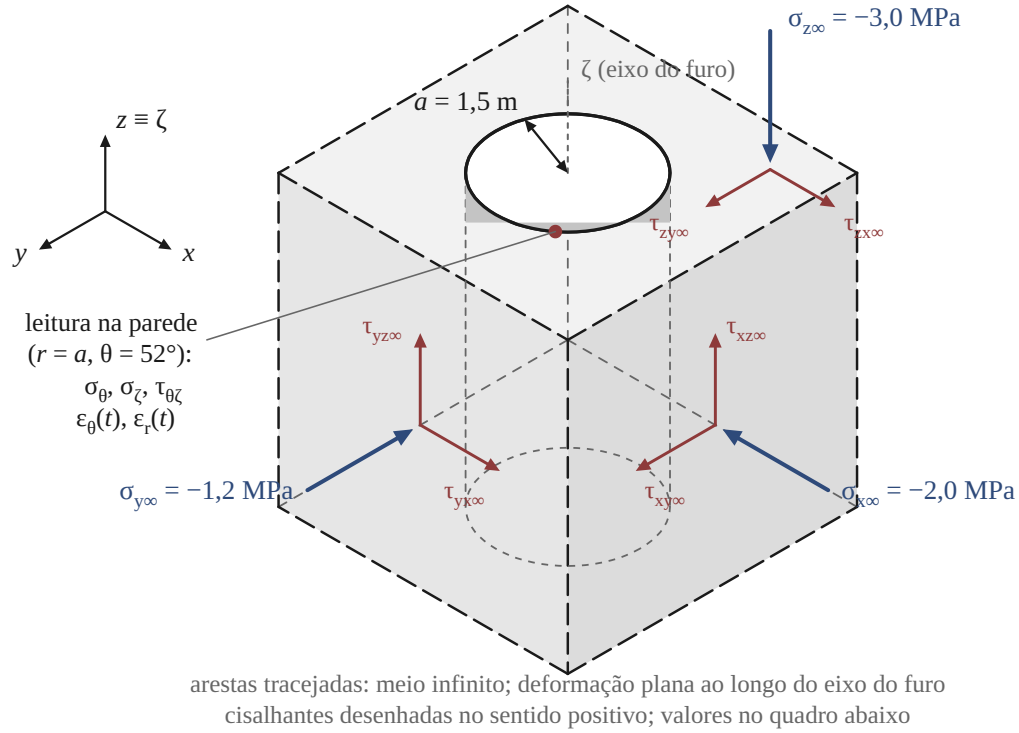
$$\{\sigma_\theta, \sigma_\zeta, \tau_{\theta\zeta}, \tau_{\zeta r}, \tau_{r\theta}, \sigma_r\}^T = [M(\nu, \theta, \eta)] \{\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \sigma_z^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{zx}^\infty, \tau_{xy}^\infty\}^T,$$

com os coeficientes m_{ij} dados naquele relatório. Na parede, $\eta = 1$ e resultam $\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{\zeta r} = 0$, restando as três componentes que a instrumentação alcança. A implementação foi conferida por três caminhos: as duas equações de equilíbrio em coordenadas polares, satisfeitas com resíduo da ordem de 10^{-9} ; as condições de contorno na parede, exatas; e o campo remoto, que para $r \gg a$ reproduz a rotação do tensor imposto.

O esquema do problema está na [Figura 12](#); a [Figura 13](#) reúne os resultados. Adotam-se $a = 1,5$ m, $\nu = 0,20$ e tensor remoto de $-2,0$, $-1,2$ e $-3,0$ MPa nas direções normais, com cisalhamentos de $0,4$, $-0,5$ e $0,8$ MPa. A concentração leva σ_θ de $-1,9$ MPa no campo remoto a $-6,8$ MPa na parede, e há um trecho de tração de até $0,4$ MPa na direção ortogonal. Aberto o furo na idade $z_0 = 28$ dias e mantida a solicitação, o algoritmo devolve tensão constante e deformação igual a $\sigma_\theta J(t, z_0)$ com diferença de 4×10^{-16} — exata, e não aproximada, porque o degrau é contabilizado apenas por $\Delta D_{n,0}$, como se mostrou na Seção 6.3. Na parede, com $\sigma_r = 0$, a componente $\varepsilon_r(t)$ segue $-\nu(\sigma_\theta + \sigma_\zeta) J(t, z_0)$ e confirma o mesmo comportamento.

Furo cilíndrico em meio infinito sob tensor remoto triaxial

Hiramatsu e Oka (1962) — carregamento mecânico mantido, $\Delta T = 0$ (Seção 8.4)



Geometria: furo cilíndrico de raio $a = 1,5$ m, eixo $\zeta \equiv z$, em meio infinito; $\eta = a/r$, θ no plano da seção.

Tensor remoto: $\sigma_{x\infty} = -2,0$; $\sigma_{y\infty} = -1,2$; $\sigma_{z\infty} = -3,0$ MPa; $\tau_{yz\infty} = 0,4$; $\tau_{zx\infty} = -0,5$; $\tau_{xy\infty} = 0,8$ MPa.

Contorno: parede livre: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$ em $r = a$; tensor remoto recuperado para $r \rightarrow \infty$.

Carregamento: furo aberto em $z_0 = 28$ dias, solicitação mantida; $\Delta T = 0$ (Teorema I de Zhu).

Material: $\nu = 0,20$; $E(z)$ e $D(t,z)$ da cadeia de Kelvin com envelhecimento (UHE Itumbiara).

Resposta: σ constante; $\varepsilon_\theta(t) = \sigma_\theta J(t, z_0)$ e $\varepsilon_r(t) = -\nu(\sigma_\theta + \sigma_\zeta) J(t, z_0)$ na parede, $\theta = 52^\circ$.

Figura 12 — Esquema do furo cilíndrico sob tensões remotas (Hiramatsu e Oka, 1962).

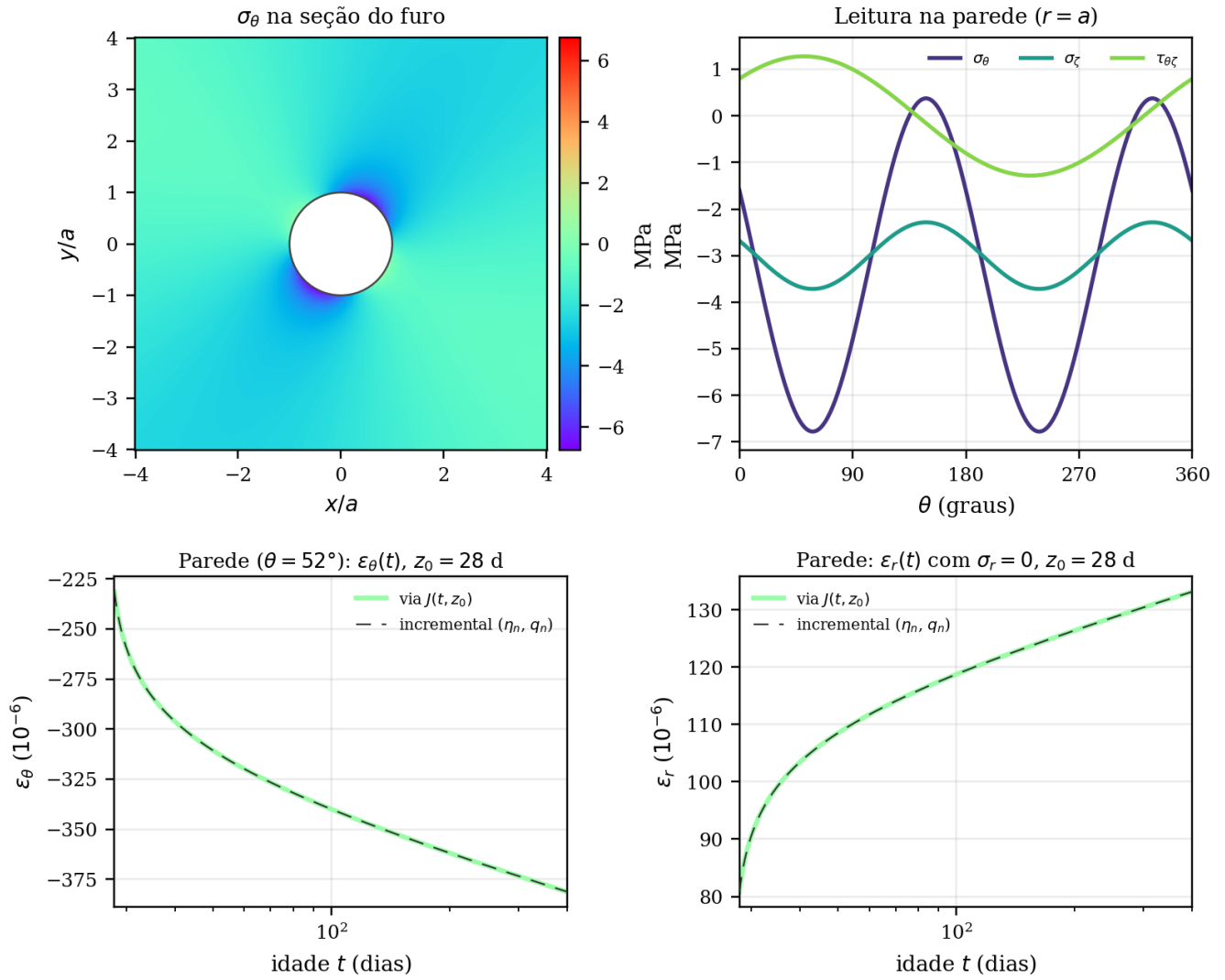


Figura 13 — Furo cilíndrico sob tensor remoto triaxial. Acima: σ_θ na seção (esquerda) e as três componentes lidas na parede (direita). Abaixo: $\varepsilon_\theta(t)$ e $\varepsilon_r(t)$ na parede sob carga mantida a partir de $z_0 = 28$ dias (σ constante, deformação por J).

Há uma segunda razão para incluir este caso. A determinação experimental do tensor a partir de deformações medidas em direções escolhidas na parede — o método STT, ou os rasgos do método das almofadas — é a mesma operação da roseta do concreto massa: monta-se $\varepsilon_n = \hat{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{n}$ para cada direção e inverte-se o sistema. É exatamente onde a distinção entre γ_{ij} e ε_{ij} registrada na Seção 2 corrompe o resultado se for ignorada. Percorrendo a ida e a volta com quatro direções na parede, o tensor recuperado coincide com o imposto até 6×10^{-14} em 10^{-6} . A verificação é trivial do ponto de vista numérico e não trivial do ponto de vista da montagem: é a mesma rotina que a Parte II aplica às leituras de campo.

9. Considerações sobre a capacidade de deformação

A literatura trata sob o mesmo nome duas coisas distintas. A primeira é o ensaio de capacidade de deformação, em que uma viga é levada à ruptura e se registra a deformação da fibra extrema no instante da fratura. A segunda é o critério de capacidade de deformação, regra de verificação empregada em estudos térmicos quando não se dispõe daquele ensaio, e na qual a capacidade é estimada a partir do módulo de ruptura f_r e do módulo de elasticidade E .

9.1 Critério clássico e equivalência em tensões

Houghton (1976) propôs estimar a capacidade de deformação na tração a partir de ensaios correntes. Para carregamento rápido,

$$\varepsilon_{cap}^r(z) = \frac{f_r(z)}{E(z)}.$$

Para carregamento lento, o acréscimo por fluência conduz a

$$\varepsilon_{cap}^\ell(t, z) = f_r(z) J(t, z),$$

ou, com o coeficiente de fluência $\varphi(t, z) = E(z)D(t, z)$,

$$\varepsilon_{cap}^\ell(t, z) = \varepsilon_{cap}^r(z) [1 + \varphi(t, z)].$$

Do lado da solicitação, admite-se estado uniaxial, restrição escalar K_R e queda de temperatura ΔT contada a partir da temperatura máxima da peça:

$$\varepsilon_{dem}(t) = K_R \alpha \Delta T(t) \quad \left[+ \varepsilon^{shr} \text{ quando houver} \right].$$

A referência em $T_{\max}$ tem origem documentada. Carlson, Houghton e Polivka (2026) registram que, no instante da temperatura interna máxima, “a tensão é próxima o suficiente de zero, de modo que se pode assumir que seja zero”. A razão física está no mesmo texto: durante a elevação de temperatura o concreto é “mais ou menos plástico”, e só depois do pico se torna “mais resistente e aproximadamente mais elástico”. Trata-se de constatação de obra, colhida em barragens instrumentadas, e não de resultado de cálculo. O instrumento embutido fornecia deformação e temperatura; converter uma na outra exigia precisamente o que era incerto, o módulo na idade de carregamento e a relaxação. A hipótese antecede, portanto, a possibilidade de calcular a história de tensões, e não se confunde com o instante em que a tensão calculada é nula — instante posterior, em geral no resfriamento, quando a compressão acumulada no aquecimento se dissipa.

A verificação clássica escreve-se

$$K_R \alpha \Delta T(t) \leq \frac{\varepsilon_{cap}^\ell(t, z)}{\gamma},$$

em que γ é um coeficiente de segurança. A forma de projeto mais usada é a queda de temperatura admissível, que a prática brasileira de estudos térmicos, sobretudo na linha Carlson/Houghton, denomina Equivalente em Variação de Temperatura (EVT):

$$\Delta T_{adm}(t, z) = \frac{\varepsilon_{cap}^\ell(t, z)}{K_R \alpha} = \frac{f_r(z) J(t, z)}{K_R \alpha}.$$

Trata-se de expressar a capacidade de deformação em unidades de temperatura: a deformação admissível dividida por $K_R \alpha$. Substituindo $\varepsilon_{cap}^\ell = f_r J$ e dividindo ambos os membros por $J(t, z)$,

$$\frac{K_R \alpha \Delta T(t)}{J(t, z)} \leq f_r(z) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ef}(t) \leq f_r(z),$$

em que $\sigma_{ef} = K_R \alpha \Delta T E_{ef}$ e $E_{ef}(t, z) = 1/J(t, z)$ é o módulo efetivo. Ou seja, o critério da capacidade de deformação é, termo a termo, um critério em tensões com módulo efetivo. Como índice de fissuração,

$$I(t) = \frac{f_r(z)}{\sigma_{ef}(t)} = \frac{\varepsilon_{cap}^\ell(t, z)}{\varepsilon_{dem}(t)}.$$

A rota do ensaio de deformação lenta absorve E , D e f_r numa única medida. A rotina de cálculo em tensões exige as três informações separadamente, mas dispensa as hipóteses simplificadoras de uniaxialidade, de coeficiente de restrição escalar (a menos que se queira simplificar e aproximar uma situação 3D de uma 1D) e de idade única de carregamento, que estão embutidas na existência de um $J(t, z)$ único no denominador.

9.2 Laje fixa com envelhecimento e comparação dos critérios

A *laje fixa* de Zhu (2014, §7.1), com deslocamentos horizontais impedidos ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$), face livre ($\sigma_z = 0$), é o mesmo estado de restrição do problema da Seção 8.2, agora com história térmica contínua e módulo de elasticidade variando com a idade. A situação se enquadra no que é descrito pelo Teorema II de Zhu (força mássica nula, variação de temperatura não nula, parte do contorno livre e parte com deslocamento conhecido), e, portanto, os deslocamentos são os da estrutura elástica. O método do coeficiente de relaxação (eq. (7.10) de Zhu) escreve:

$$\sigma(t_n) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i^e K(t_n, \tau_i), \quad \Delta\sigma_i^e = -\frac{E_i \alpha \Delta T_i}{1 - \nu}, \quad K(t, \tau) = \frac{R(t, \tau)}{E(\tau)},$$

com $E_i = [E(t_{i-1}) + E(t_i)]/2$ e $\tau_i = (t_{i-1} + t_i)/2$. A $R(t, \tau)$ é obtida de J como na Seção 8.2.1 (não se usa a fórmula empírica (7.13) de Zhu: o material é a mesma cadeia de Kelvin com envelhecimento das Figuras 4 e 5).

O campo de temperaturas adotado como exemplo é obtido do histórico de temperaturas do ponto central ($x = 1,5$ m) de uma laje sobre um terreno (caso típico de uma fundação). Tal histórico é obtido de um modelo unidimensional de condução de calor de uma laje de espessura $L = 3$ m, com geração interna (função denominada de ‘Hill’) e convecção nas duas faces. Parâmetros adotados: $T_0 = T_{amb} = 20^\circ\text{C}$; $k = 7,5 \text{ kJ}/(\text{m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C})$, $\rho = 2400 \text{ kg}/\text{m}^3$ e $c = 0,75 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$, donde $\alpha = k/(\rho c) = 0,10 \text{ m}^2/\text{d}$; $h_c = 43,2 \text{ kJ}/(\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C})$; elevação adiabática $\Delta T_{adi} = 50^\circ\text{C}$ com $\tau = 36 \text{ h}$ e $\beta = 2$ (τ e β são parâmetros cinéticos do grau de hidratação); maturidade por Arrhenius com $E_a/R = 4000 \text{ K}$ e $T_{ref} = 20^\circ\text{C}$. O pico no centro resulta em 68°C aos 2,5 dias. Na laje fixa, $\sigma_x = \sigma_y$ no ponto depende apenas da temperatura *local*; comparam-se a eq. (7.10) com $K = R/E$ e o algoritmo $\{\eta_n\}$, q_n , cuja diferença máxima na malha empregada é de 0,034 MPa — cerca de 1% do valor de pico.

Com a mesma história de temperatura, a Figura 14 compara os critérios da tensão e da capacidade de deformação da Seção 9.1. Como a restrição é total ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$), adota-se $K_R = 1$; o fator $(1 - \nu)$ corresponde ao estado biaxial da laje, equivalente ao estado uniaxial em que o critério clássico está escrito. A resistência à tração evolui com a maturidade, $f_t = f_{t,\infty} t_{eq}^n / (a^n + t_{eq}^n)$, com $f_{t,\infty} = 4,5 \text{ MPa}$, $a = 2 \text{ d}$ e $n = 1, 2$.

No gráfico superior direito (Figura 14) está o critério clássico: a solicitação é a queda $T_{max} - T$ contada a partir do pico e a capacidade é

$$\text{EVT}(t) = \frac{f_t(t) J(t, z) (1 - \nu)}{K_R \alpha}, \quad z = t_{max}.$$

O EVT inclui a parcela elástica de J e, por isso, parte do patamar $f_t/E(z)$ em t_{max} , e não de zero. No gráfico inferior direito (Figura 14) está o critério adaptado: a mesma verificação reescrita em tensões,

$$\sigma_{ef}(t) = \frac{K_R \alpha (T_{max} - T)_+}{(1 - \nu) J(t, z)},$$

traçada desde $t = 0$, nula durante o aquecimento e crescente no resfriamento, e comparada com $f_t(t)$. As duas escritas são a mesma desigualdade, e de fato $T_{\max} - T \leq \text{EVT}$ e $\sigma_{ef} \leq f_t$ trocam de sinal no mesmo instante, aos 20 dias.

Interessa comparar esses dois painéis com o inferior esquerdo (Figura 14). Ambas as escritas do critério clássico anunciam fissuração aos 20 dias: ao final, $\sigma_{ef} = 5,76$ MPa contra $f_t = 4,48$ MPa. A integração incremental da história completa fornece 5,47 MPa e também ultrapassa a resistência. A diferença vem das duas hipóteses da rota clássica, a tensão nula no pico térmico e a idade única de carregamento $z = t_{\max}$, que deixam de fora a compressão acumulada durante o aquecimento e a relaxação dos incrementos aplicados nas primeiras idades.

Convém analisar como essas duas hipóteses se combinam. No exemplo, a tensão no pico térmico não é nula: vale $-6,45$ MPa de compressão. Do pico ao final da simulação a tensão varia 11,9 MPa, ao passo que a estimativa dessa mesma variação pelo módulo efetivo com idade única fornece 5,76 MPa. Os dois desvios têm sinais opostos e em boa parte se compensam: $0 + 5,76 = 5,76$ contra $-6,45 + 11,9 = 5,45$. A concordância aparente entre σ_{ef} e a tensão incremental em obras com histórico semelhante deve-se a essa compensação, e não à exatidão isolada de cada hipótese.

Se, em contrapartida, se conhecesse o instante t^* em que a tensão retorna a zero após o período compressivo — no exemplo, $t^* = 12,5$ dias e $T^* = 46^\circ\text{C}$ — e se adotasse esse instante como origem da verificação, a deformação térmica acumulada desde t^* é a mesma nas duas rotas: $\varepsilon_{dem}(t) = K_R \alpha (T^* - T)/(1 - \nu)$ para $t \geq t^*$. O desvio entre a curva tracejada azul clara e a tensão incremental no painel inferior direito da Figura 14 não vem da solicitação térmica, e sim da fluência adotada no denominador.

A forma ingênua $\sigma_{ef}^* = [K_R \alpha (T^* - T)]_+ / (1 - \nu) / J(t, t^*)$ aplica um único $J(t, t^*)$ à queda total de temperatura, como se todo o resfriamento tivesse sido imposto de uma vez em t^* . Isso superestima o tempo de fluência de cada parcela de deformação e, portanto, subestima a tensão — a curva parece “mais fluente” do que a incremental, embora ε_{dem} seja idêntica. A extensão multi-idade,

$$\sigma_{ef}^*(t) = \sum_{k: \tau_k \geq t^*} \frac{K_R \alpha \Delta T_k / (1 - \nu)}{J(t, \tau_k)}, \quad t \geq t^*,$$

atribui a cada incremento ΔT_k o J da sua própria idade τ_k e acompanha a incremental de perto nas primeiras semanas (desvio quadrático médio de 0,22 MPa após t^* , contra 0,54 MPa com J único e 1,77 MPa com $z = t_{\max}$). O resíduo no longo prazo (5,01 contra 5,47 MPa ao final) reflete o estado de memória da cadeia de Kelvin no instante t^* : $\sigma(t^*) = 0$ não implica histórico viscoelástico nulo, e a compressão anterior continua a influenciar a tração subsequente.

Daí decorre uma recomendação de ordem prática: as duas hipóteses clássicas ($\sigma = 0$ em $t_{\max}$ e idade única $z = t_{\max}$) não podem ser corrigidas em separado. Mantendo-se a compressão de pico calculada e conservando-se o módulo efetivo com $z = t_{\max}$, obtém-se $-0,69$ MPa, ou seja, a conclusão de que não haveria tração. Com $z = t^*$ e fluência multi-idade, a mesma estrutura de critério aproxima a tensão incremental, mas t^* e o estado de memória em t^* não são dados de projeto: só emergem do cálculo completo ou da instrumentação.

Em histórias de resfriamento suave e restrição uniforme, σ_{ef} e a tensão incremental acompanham-se; a divergência em histórias multi-idade é o objeto da Seção 9.3.

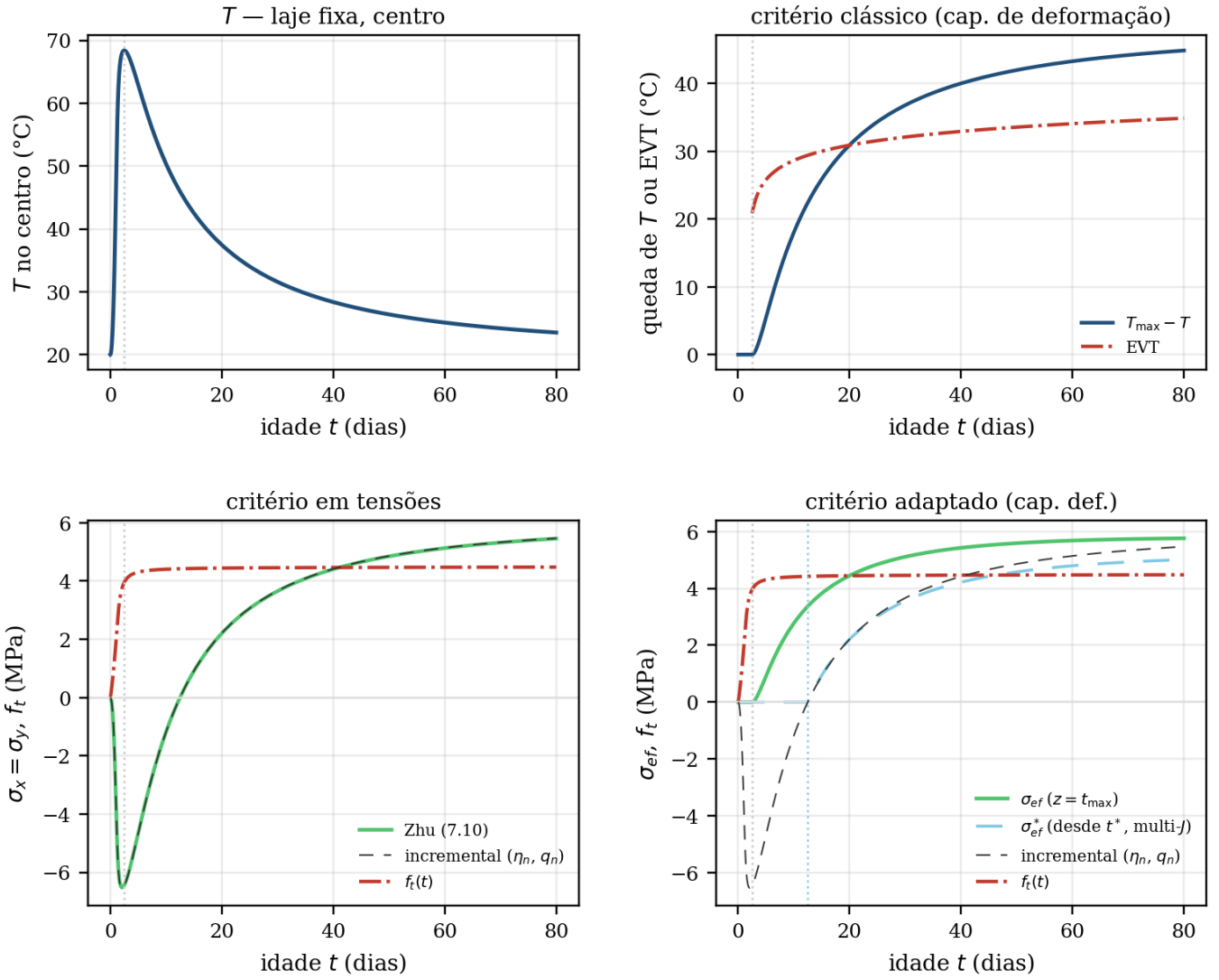


Figura 14 — Laje fixa com envelhecimento: topo — T no centro e critério clássico ($T_{\max} - T$ e EVT); base — critério em tensões ($\sigma_x = \sigma_y$ via Zhu e via incremental, com f_t) e critério adaptado (σ_{ef} com $z = t_{\max}$; σ_{ef}^* multi- J desde t^* , tracejado azul claro).

9.3 Limite de validade e verificação com a formulação incremental

Numa história térmica real não há uma única idade z de carregamento: a tensão se constrói por incrementos aplicados em todas as idades. Não existe, portanto, um $J(t, z)$ único, nem um módulo efetivo único, e a identidade acima se dissolve. O critério clássico permanece exato apenas no caso particular de carregamento em uma só idade — que é precisamente a situação de um ensaio.

Neste ponto, a formulação incremental deste artigo faz sentido novamente. Tendo como dado de entrada com os mesmos $D_i(z)$, τ_i e $E(z)$, ela devolve o campo $\{\sigma(t)\}$ em toda a estrutura, e a verificação passa a ser:

$$I(t) = \frac{f_t(t)}{\sigma_1(t)} \geq I_{adm},$$

com σ_1 a tensão principal maior. Nessa forma, os elementos de natureza empírica ficam restritos a $f_t(t)$ e ao limiar I_{adm} , cada um com significado próprio e com incertezas passíveis de avaliação separadamente.

Zhu (2014, §6.4 e §6.5) delimita esse alcance por outro caminho. Alfrey já tratara a estrutura homogênea sob condições de contorno simples, com o contorno inteiramente sob forças ou inteiramente

sob deslocamentos prescritos. Zhu estendeu o resultado à estrutura *não homogênea* sob contorno misto, sob a condição de que as constantes de material sejam proporcionais,

$$E_1(\tau) C_1(t, \tau) = E_2(\tau) C_2(t, \tau), \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

e enunciou dois teoremas: o Teorema II, empregado na Seção 9.2, e o Teorema I, retomado na Seção 9.4. Ambos valem com envelhecimento, já que E e C dependem da idade. Portanto, nisso vão além do princípio da correspondência. Às estruturas que satisfazem essa condição o autor chama *estruturas de deformação proporcional*: peça homogênea sobre fundação rígida; peça não homogênea sobre fundação rígida com constantes proporcionais; peça e fundação viscoelástica com todas as constantes proporcionais. Nesses casos a resposta viscoelástica sai da resposta elástica pelo Teorema I ou pelo coeficiente de relaxação do Teorema II, sem integração incremental, como se fez na Seção 9.2.

Fora dessa classe o próprio autor remete, então, ao método dos elementos finitos (MEF, ou em inglês *FEM*). É o caso de concretos de fluências não proporcionais devido ao contato, por exemplo, de um concreto com a rocha de fundação, de camadas lançadas em idades diferentes, e de contornos que variam com a evolução da obra. Para esse outro domínio, mais geral, é válido o que foi apresentado na formulação das Seções 4 a 7. Ali também há premissas de validade, mas atende ao caso geral em que a hipótese de proporcionalidade não se sustenta.

9.4 Ensaio de fluência na flexão sob carga mantida

Como alternativa ao ensaio destrutivo de capacidade de deformação sob carregamento rápido, propõe-se um ensaio de fluência na flexão em que a carga é aplicada e mantida constante, sem levar o corpo de prova à ruptura. Numa viga biapoiada com carga nos terços, o campo de momentos é fixado pelo equilíbrio; se o material é homogêneo e envelhece uniformemente, a distribuição elástica de tensões satisfaz as condições de equilíbrio e compatibilidade em qualquer instante. Não é necessário invocar o princípio da correspondência de Alfrey e Read, que exige núcleo de convolução e não vale com envelhecimento.

Isto está amparado pelo Teorema I de Zhu (2014, §6.4), enunciado para material com envelhecimento. Para a estrutura homogênea, ou não homogênea com constantes de material proporcionais, com variação de temperatura nula, parte do contorno sob força externa e parte com deslocamento impedido, as tensões devidas às forças de massa e às forças externas *não são afetadas pela fluência*, e a deformação em qualquer ponto e instante obtém-se da deformação elástica na idade de carregamento τ_0 por

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon^e(x, y, z, \tau_0) [1 + E(\tau_0) C(t, \tau_0)].$$

A viga sob carga mantida é esse caso. A distribuição de tensões permanece a elástica e a deformação da fibra extrema cresce pelo fator $1 + \varphi(t, \tau_0)$, isto é, $\varepsilon(t)/\sigma_0 = J(t, \tau_0)$, que é a leitura do ensaio.

Registrando a deformação da fibra extrema $\varepsilon(t)$ sob tensão constante σ_0 aplicada na idade z_0 ,

$$J(t, z_0) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^{shr}(t)}{\sigma_0},$$

em que ε^{shr} provém de viga companheira descarregada, selada nas mesmas condições. Recomenda-se $\sigma_0 \leq 0,4 f_r(z_0)$ para permanecer na faixa linear e evitar microfissuração que acrescenta não-linearidades. Replicando o ensaio em idades escalonadas $z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(K)}$, constrói-se a superfície $D(t, z)$ e obtém-se os parâmetros da cadeia de Kelvin, que são o dado de entrada da formulação na Seção 3.

Do ponto de vista do algoritmo, esse ensaio é o degrau $\{\Delta\sigma_0\}$ em $t_0 = z_0$ com $\{\Delta\sigma_n\} = \mathbf{0}$ para $n \geq 1$. Nessa condição, a Seção 6 mostrou que os termos sucessivos da soma se cancelam dois a dois e o resultado reproduz exatamente $J(t, z_0)$ — o ensaio serve, portanto, ao mesmo tempo como calibração da cadeia e como validação do código antes de aplicá-lo à história térmica.

10. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado, detalhadamente, a dedução do incremento de deformação de fluência com envelhecimento na forma $\{\Delta\varepsilon_n^{cr}\} = \{\eta_n\} + q_n[\mathbb{V}]\{\Delta\sigma_n\}$. A partir da função de fluência D na forma de uma série de exponenciais com coeficientes $D_i(z)$ dependentes da idade e tempos de retardo τ_i , sob a hipótese de taxa de tensão constante em cada passo, obtêm-se o escalar q_n , as variáveis auxiliares $\{\omega_{i,n}\}$ e o vetor hereditário $\{\eta_n\}$, sem reintegrar desde a origem.

Verificou-se, por via analítica e numérica, que, sob um degrau de tensão $\Delta\sigma_0$ aplicado na idade z_0 e mantido constante, o algoritmo reproduz exatamente $D(t, z_0)$ e, com a parcela elástica, a própria função de fluência $J(t, z_0)$, qualquer que seja a discretização temporal. A formulação situa-se alinhada ao algorítmico de Zocher et al. (1997), porém agora ancorada na função de fluência com envelhecimento.

A incrementalização foi validada no limite sem envelhecimento (Zocher et al.) e em estado plano, bem como em laje fixa com envelhecimento (Zhu). Com isso, a Parte I fecha o elo entre a dedução e a implementação em elementos finitos.

Resta delimitar o alcance, que pelos teoremas de Zhu para as estruturas de deformação proporcional, a resposta viscoelástica com envelhecimento sai diretamente da resposta elástica, sem integração incremental. É o caso da peça homogênea sobre fundação rígida e o da peça e fundação com constantes de material proporcionais. A formulação apresentada não substitui esse resultado, dentro desse escopo de validade. Destina-se ao caso geral, em que concretos de fluências distintas convivem na mesma estrutura, a fundação é real e o contorno muda ao longo da construção, com retiradas de formas, alteração nas condições de cura e ambientais, situações essas para as quais o próprio autor remete ao método dos elementos finitos.

A Parte II, em preparação, tratará da validação numérico-experimental de um concreto massa denominado ‘classe J’ do VET (Vertedouro Extravasador de Troncos) da UHE Santo Antônio: comparação das deformações do MEF com extensômetros, do tensor de tensões da roseta+caixa atensorial com as advindas pelo software de elementos finitos, e do *concrete stress meter* como referência de apoio, em tempo reduzido via *shift factor* a_T .

11. Referências

- ANDRADE, W. P. et al. (Equipe de Furnas). *Concretos: massa, estrutural, projetado e compactado com rolo — ensaios e propriedades*. São Paulo: Pini/Furnas, 1997.
- GAMBALE, E. A.; FONTOURA, J. T.; GUEDES, Q. M.; PACELLI, W. A. Resolução numérica do modelo viscoelástico linear com envelhecimento do concreto e sua aplicação no cálculo das tensões de origem térmica em barragens de C.C.R. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE GRANDES BARRAGENS, 20.; REUNIÃO DO IBRACON, 34., 1992, Curitiba. *Anais...* Curitiba: [s.n.], 1992.
- GUEDES, Q. M.; GAMBALE, E. A. Modelos viscoelásticos com envelhecimento para o betão em massa de barragens. *Informação Científica Barragens*, Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, p. 1–7, 1990.
- BAŽANT, Z. P. *Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete*. Chichester: John Wiley & Sons, 1988.
- JIRÁSEK, M.; BAŽANT, Z. P. *Inelastic Analysis of Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.
- GOMES, F. M. P. Estudo da fluência do concreto massa — hidrelétricas mais seguras e sustentáveis. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 55., 2013, Gramado. *Anais...* São Paulo: IBRACON, 2013.
- QUEBEC ENGENHARIA / GST. *Relatório GST.E.051.2015-R0 — UHE Salto do Apicás: estudos térmicos e tensionais unidimensional e bidirecional do concreto de 2º estágio*. 2015.
- CARLSON, R. W.; HOUGHTON, D. L.; POLIVKA, M. Causas e controle de fissuração em concreto massa sem armadura. Tradução de W. P. de Andrade. *Revista do Instituto Roy Carlson*, v. 1, n. 2, p. 1–11, 2026.
- CARMO, J. B. M.; ALI, E. Análise Térmica do Concreto da Barragem Canoas. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE CCR, 2., 1996, Curitiba. *Anais...* São Paulo: IBRACON, 1996. v. 1.

- CARMO, J. B. M.; ALI, E. Uma Metodologia para Análise de Temperatura no CCR. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE GRANDES BARRAGENS, 23., 1999, Belo Horizonte. *Anais...* Rio de Janeiro: CBGB, 1998. v. 1.
- HOUGHTON, D. L. Determining tensile strain capacity of mass concrete. *ACI Journal*, v. 73, n. 12, p. 691–700, dez. 1976.
- HOUGHTON, D. L. Concrete strain capacity tests — their economic implications. In: ENGINEERING FOUNDATION RESEARCH CONFERENCE ON ECONOMIC CONSTRUCTION OF CONCRETE DAMS, 1972, Pacific Grove, Califórnia. *Proceedings...* p. 75–99.
- BAŽANT, Z. P.; HUBLER, M. H.; WENDNER, R. RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete — material model and structural analysis. *Materials and Structures*, v. 48, p. 753–770, 2015.
- BAŽANT, Z. P.; PRASANNAN, S. Solidification theory for concrete creep. I: formulation; II: verification and application. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n. 8, p. 1691–1725, 1989.
- BAŽANT, Z. P.; XI, Y. Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 121, n. 2, p. 281–288, 1995.
- JIRÁSEK, M.; HAVLÁSEK, P. Accurate approximations of concrete creep compliance functions based on continuous retardation spectra. *Computers and Structures*, v. 135, p. 155–168, 2014.
- ZOCHER, M. A.; GROVES, S. E.; ALLEN, D. H. A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, n. 12, p. 2267–2288, 1997.
- SOUZA, F. V.; ALLEN, D. H. Multiscale modeling of impact on heterogeneous viscoelastic solids containing evolving microcracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 82, n. 4, p. 464–504, 2010.
- SOUZA, F. V.; ALLEN, D. H. Modeling the transition of microcracks into macrocracks in heterogeneous viscoelastic media using a two-way coupled multiscale model. *International Journal of Solids and Structures*, v. 48, n. 22–23, p. 3160–3175, 2011.
- SOUZA, F. V. *Multiscale modeling of impact on heterogeneous viscoelastic solids with evolving microcracks*. 2009. Tese (Doutorado em Engineering Mechanics) — University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, 2009.
- BAŽANT, Z. P. Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete. *Materials and Structures*, v. 5, p. 135–141, 1972.
- ZHU, Bofang. *Thermal stresses and temperature control of mass concrete*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Theory of elasticity*. 3. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1970.
- HIRAMATSU, Y.; OKA, Y. Stress around a shaft or level excavated in ground with a three-dimensional stress state. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, v. 24, parte 1, p. 56–76, 1962.
- RUGGERI, E. R. F.; GOMES, F. M. P. *Tensões “in situ” em maciços rochosos*. Relatório técnico. Goiânia: Eletrobrás Furnas, fev. 2013.
- GOMES, F. M. P. *Monitoramento do VET da UHE Santo Antônio — execução e resultados*. Relatório técnico (campanha experimental, concreto classe J). Projeto ANEEL/FURNAS, 2014. (não publicado)
- SASSONE, M.; CHIORINO, M. A. Calculations of long-term structural behaviour of concrete structures. In: *Proceedings of the Workshop on Creep, Shrinkage and Durability of Concrete and Concrete Structures*, 2005.
- GOMES, F. M. P.; SOUZA, F. V. Cálculo de tensões de origem térmica no concreto massa considerando fluência com envelhecimento — Parte II: validação numérico-experimental no VET da UHE Santo Antônio. *Revista do Instituto Roy Carlson*, v. 1, n. 2, 2026. (em preparação).

12. Anexo A — Lista de símbolos

Símbolo	Significado
$J(t, z)$	Função de fluência total: deformação por unidade de tensão em t para carga aplicada na idade z
$D(t, z)$	Parcela de fluência propriamente dita, $J(t, z) - 1/E(z)$; $D(z, z) = 0$
$D_i(z)$	Amplitude do i -ésimo elemento da cadeia de Kelvin, dependente da idade de carregamento
$D_{i,n}^*$	Valor de D_i no ponto médio do passo n : $D_i(t_n - \Delta t_n/2)$
τ_i	Tempo de retardo do i -ésimo elemento da cadeia ($i = 1, \dots, N$)
N	Número de unidades de Kelvin da cadeia
M_i	Número de exponenciais de envelhecimento da i -ésima unidade
$a_i, b_{i,j}, c_{i,j}$	Coefficientes da forma $D_i(z) = a_i + \sum_{j=1}^{M_i} b_{i,j} e^{-z/c_{i,j}}$
$\Delta D_{n,z}$	$D(t_n, z) - D(t_{n-1}, z)$; com $z = t_0$, escreve-se $\Delta D_{n,0}$
$\mathbb{V}, [\mathbb{V}]$	Operador espacial isotrópico com Poisson elástico (tensor de 4ª ordem e matriz de Voigt com $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$)
$E(z)$	Módulo de elasticidade na idade z
ξ, ξ'	Tempos reduzidos correspondentes a t e z (o apóstrofo em ξ' denota a idade de carregamento)
a_T	<i>Shift factor</i> do princípio de superposição tempo-temperatura
$\{\Delta\sigma_0\}$	Degrau de tensão aplicado em t_0
$\{\Delta\sigma_n\}$	Incremento de tensão no passo n (parte contínua da história)
q_n	Coefficiente escalar do passo corrente
$\{\omega_{i,n}\}$	Variável auxiliar de memória do i -ésimo termo da série
$\{\eta_n\}$	Parcela hereditária conhecida no início do passo

13. Anexo B — Obtenção da cadeia de Kelvin

A Seção 3 toma a cadeia de Kelvin com envelhecimento como dada. Este anexo trata de onde ela vem: como determinar os tempos de retardo τ_i e as amplitudes $D_i(z)$ a partir de um modelo previsor ou de dados de ensaio, quais restrições a superfície de fluência deve respeitar, e por que, no caso do modelo B4, esse trabalho não precisa ser feito por regressão.

13.1 O problema

A formulação das Seções 4 a 7 exige que $D(t, z)$ seja uma soma finita de exponenciais na duração de carga, com tempos de retardo comuns a todos os incrementos de tensão. É a fixidez dos τ_i que permite fatorar o estado interno nas variáveis $\{\omega_{i,n}\}$ e obter a recorrência de custo constante por passo; e é a dependência de D_i apenas em z que preserva a linearidade da superposição.

Dado um previsor de fluência, o problema é determinar $\{\tau_i, D_i(\cdot)\}$ que reproduza a família de curvas com resíduo pequeno o bastante para não contaminar o cálculo de tensões. A resposta depende de uma propriedade do previsor.

13.2 Modelos separáveis: ajuste exato em dois estágios

Um preditor é separável quando a fluência específica é o produto de uma função da idade por um núcleo que depende apenas da duração,

$$D(t, z) = \varphi(z) K(t - z).$$

É o caso do ACI 209, cujo núcleo tem a forma $K(u) = u^\psi / (d + u^\psi)$ e cuja dependência da idade entra por um fator multiplicativo.

A separabilidade decompõe o ajuste em dois problemas independentes, cada um deles unidimensional e, por isso, levável a precisão arbitrária. No primeiro estágio ajusta-se o núcleo, $K(u) \approx \sum_i \phi_i (1 - e^{-u/\tau_i})$; no segundo, a lei de envelhecimento, $\varphi(z) \approx a + \sum_j b_j e^{-z/c_j}$. O resultado é o produto, $D_i(z) = \phi_i \varphi(z)$, e o erro total é a soma de dois erros que se controlam separadamente. A chave é que a idade entra apenas como fator de escala vertical comum a todas as unidades: a forma da curva em duração é a mesma para toda idade de carregamento.

13.3 Admissibilidade da superfície de fluência

Duas condições interessam. A primeira é a monotonicidade: a fluência cresce com a duração e decresce com a idade de carregamento,

$$\frac{\partial J}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial J}{\partial z} \leq 0.$$

A segunda é a condição de não divergência,

$$\frac{\partial^2 J(t, z)}{\partial t \partial z} \geq 0,$$

que exige que as curvas de fluência de idades de carregamento distintas, traçadas contra o tempo corrente, não se afastem entre si. Não é exigência termodinâmica estrita, mas é satisfeita pelos dados experimentais e é condição suficiente para que o módulo de relaxação obtido por superposição seja não negativo e monótono — o que importa diretamente aqui, já que R é obtido de J pela recorrência da Seção 8.2.1.

Aplicada à forma da Seção 3, a não divergência fornece um critério por parcela. De

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t \partial z} = \sum_i e^{-(t-z)/\tau_i} \left[\frac{D_i'(z)}{\tau_i} + \frac{D_i(z)}{\tau_i^2} \right]$$

segue que a positividade termo a termo equivale a

$$\tau_i \leq \frac{D_i(z)}{-D_i'(z)}$$

para toda idade z de interesse. Para a forma usual $D_i(z) = a_i + b_i e^{-z/c_i}$ com $a_i, b_i \geq 0$, o critério reduz-se, no caso $a_i = 0$, à condição $\tau_i \leq c_i$: o tempo característico de decaimento da amplitude não pode ser menor que o tempo de retardo da unidade. O critério é suficiente e não necessário — a soma pode ser admissível com parcelas isoladas violando-o —, mas serve como diagnóstico preciso, aplicável unidade a unidade sobre a cadeia montada.

Convém registrar o resultado desse diagnóstico sobre os previsores usuais, avaliado antes de qualquer ajuste, numa grade de oito idades por seis durações: o ACI 209 viola a não divergência em 24 dos 48 pontos, o US Bureau em 27, e o B4 em nenhum. Não é razão para descartar os dois primeiros, cuja utilidade em estudo preliminar permanece, mas explica por que a cadeia ajustada a eles produz módulo de relaxação negativo nas idades jovens com tanta frequência: a inadmissibilidade já está no alvo, e o ajuste apenas a transporta.

13.4 O modelo B4 e a representação espectral exata

A fluência básica do B4 em condições seladas conserva a forma do B3,

$$J(t, z) = q_1 + q_2 Q(t, z) + q_3 \ln [1 + (t - z)^n] + q_4 \ln \frac{t}{z}, \quad n = 0, 1.$$

As três parcelas dependentes do tempo correspondem à fluência viscoelástica com envelhecimento, à viscoelástica sem envelhecimento e à de escoamento, deduzidas da teoria da solidificação. Não são três núcleos empíricos escolhidos por conveniência, e é dessa diferença de natureza que decorre o insucesso de tratá-las como se fossem do mesmo tipo.

O B4 não é separável, e nenhuma quantidade de termos adicionais na lei de envelhecimento corrige isso. A parcela q_4 ilustra a razão. Escrevendo $u = t - z$, tem-se $q_4 \ln(t/z) = q_4 \ln(1 + u/z)$, que é uma translação horizontal no eixo logarítmico da duração, com fator de deslocamento proporcional a z . Deslocamento de logaritmo é aditivo, não multiplicativo: a razão entre a curva de z e a de uma idade de referência depende de u , e não fracamente. Com $z_{ref} = 7$ d e $z = 0,5$ d ela vale 8,23 para $u = 1$ d, 3,44 para $u = 10$ d e 1,97 para $u = 91$ d. Não existe $\bar{D}(z)$ capaz de absorver uma variação de fator quatro dentro de uma janela de duração ordinária.

A saída é transferir o deslocamento para as amplitudes, não como fator multiplicativo comum, mas como redistribuição espectral. Nessa forma o resultado é exato.

13.4.1 Parcela de escoamento

A identidade de Frullani fornece, para $z > 0$ e $u \geq 0$,

$$\int_0^\infty (1 - e^{-u/\tau}) e^{-z/\tau} \frac{d\tau}{\tau} = \ln \left(1 + \frac{u}{z} \right).$$

Reconhecendo $d\tau/\tau = d \ln \tau$, isso diz que a parcela de escoamento possui espectro de retardo contínuo exato $\mathfrak{L}^{(4)}(\tau, z) = q_4 e^{-z/\tau}$. Discretizando com razão geométrica constante X entre tempos de retardo vizinhos,

$$D_i^{(4)}(z) = q_4 \ln X e^{-z/\tau_i},$$

isto é, a forma $a_i + b_i e^{-z/c_i}$ adotada na Seção 3 é exatamente a forma correta para esta parcela, com $a_i = 0$, $b_i = q_4 \ln X$ igual para todas as unidades e $c_i = \tau_i$. Não há parâmetro a ajustar.

Duas consequências numéricas merecem registro, porque contrariam a prática corrente. O espectro tende a q_4 quando $\tau \rightarrow \infty$: é plano até o infinito, sem platô. Truncar a janela de τ na duração máxima de análise custa cerca de $q_4 u/\tau_{\max}$, o que para $u = 91$ d e $\tau_{\max} = 10^4$ d representa quase 1% — erro que nenhum algoritmo de mínimos quadrados elimina e que ele redistribui pelas demais parcelas, contaminando o ajuste inteiro. A janela deve estender-se a 10^6 ou 10^7 dias. E o espaçamento usual de meia década é grosseiro para esta parcela: passando a quatro unidades por década, o erro cai de 0,22% para cerca de $10^{-2}\%$.

Há ainda um ponto que explica um sintoma conhecido. Como $\partial J^{(4)}/\partial t = q_4/t$ não depende de z , tem-se $\partial^2 J^{(4)}/\partial t \partial z \equiv 0$: esta parcela situa-se exatamente sobre a fronteira da não divergência, sem folga

alguma. Qualquer erro de ajuste que produza c_i ligeiramente menor que τ_i empurra a unidade para o lado inadmissível. Como, além disso, a sensibilidade à idade, $-\partial J^{(4)}/\partial z = q_4/z$, diverge quando $z \rightarrow 0$, entende-se por que os módulos de relaxação negativos aparecem preferencialmente em $z = 0,5$ e $z = 1$ dia. Impor a identidade acima, em vez de regredir a lei de envelhecimento desta parcela, remove essa fonte de inadmissibilidade por construção.

13.4.2 Parcela viscoelástica com envelhecimento

Resta a parcela $q_2 Q$, definida pela integral de solidificação

$$q_2 Q(t, z) = \int_z^t \psi(s) \Phi'(s - z) ds, \quad \Phi(\xi) = \ln(1 + \xi^n), \quad \psi(s) = q_2 \left(\frac{\lambda_0}{s}\right)^m,$$

com $\lambda_0 = 1$ dia e $m = 1/2$. É a única genuinamente não separável, e também ela admite representação exata.

Teorema. Sejam ψ e Φ' completamente monótonas, com representações de Bernstein $\psi(s) = \int_0^\infty \rho(w) e^{-sw} dw$ e $\Phi'(\xi) = \int_0^\infty \ell(\sigma) e^{-\xi/\sigma} d\sigma$, com $\rho, \ell \geq 0$. Então, com $u = t - z$,

$$C(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{L}(\tau, z) [1 - e^{-u/\tau}] d\ln \tau,$$

com densidade espectral não negativa dada em forma fechada por

$$\mathfrak{L}(\tau, z) = \int_\tau^\infty \ell(\sigma) \rho\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\sigma}\right) \exp\left[-z\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\sigma}\right)\right] d\sigma.$$

A demonstração é curta. Escrevendo $s = z + \xi$ e substituindo as duas representações, a integral interna em ξ vale $\tau(1 - e^{-u/\tau})$ com $1/\tau = w + 1/\sigma$. Trocando, a σ fixo, a variável w por τ , tem-se $dw = d\ln \tau/\tau$, e o fator τ da integral interna cancela o $1/\tau$ do jacobiano. O domínio $w > 0$ corresponde a $\tau < \sigma$, o que fixa o limite inferior.

Três consequências interessam a este artigo.

A primeira é que a idade de carregamento comparece exclusivamente através do fator e^{-zw} , com $w = 1/\tau - 1/\sigma > 0$. A amplitude de cada unidade é, portanto, uma superposição contínua de exponenciais decrescentes em z , com coeficientes não negativos e sem termo constante. A família $D_i(z) = a_i + b_i e^{-z/c_i}$ adotada empiricamente na Seção 3 é a família exata, e a prática de fixar $a_i = 0$ na primeira parcela encontra aqui a sua justificativa.

A segunda é que a admissibilidade é automática. As constantes de tempo são $c = 1/w$ e os tempos de retardo são $\tau = 1/(w + 1/\sigma)$, donde $c > \tau$ para todo σ finito: toda componente satisfaz estritamente o critério de admissibilidade acima. A igualdade ocorre apenas no limite $\sigma \rightarrow \infty$, que corresponde a um amortecedor puro — ou seja, à parcela de escoamento. As duas parcelas do B4 são membros da mesma família, e a de escoamento é o caso extremo, o único que toca a fronteira.

A terceira é uma limitação de princípio. O espectro em c associado a cada tempo de retardo é um contínuo que se estende de τ até o infinito. Representá-lo por um único par (b_i, c_i) por unidade é uma redução severa, e é dela que provém o resíduo irreduzível observado nas regressões diretas da família de curvas. Não é falta de termos: é a forma de amplitude única que não comporta o alvo.

Para $\psi(s) = q_2 \lambda_0^m s^{-m}$ a representação de Bernstein é elementar, $\rho(w) = q_2 \lambda_0^m w^{m-1}/\Gamma(m)$, de modo que, representado previamente o núcleo não envelhecido por $\Phi'(\xi) = \sum_k (g_k/\sigma_k) e^{-\xi/\sigma_k}$, a densidade torna-se uma soma finita explícita,

$$\mathfrak{L}^{(2)}(\tau, z) = \frac{q_2 \lambda_0^m}{\Gamma(m)} \sum_{k: \sigma_k > \tau} \frac{g_k}{\sigma_k} w_k^{m-1} e^{-z w_k}, \quad w_k = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\sigma_k},$$

com $m = 1/2$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. A estrutura é em dois níveis: a cadeia $\{g_k, \sigma_k\}$ ajusta o núcleo não envelhecido $\ln(1 + \xi^{0,1})$, que é problema unidimensional resolúvel a precisão arbitrária, e a fórmula acima faz o resto sem nenhum ajuste adicional. O envelhecimento não é ajustado; é calculado.

Um cuidado numérico é decisivo. O expoente $m - 1 = -1/2$ produz singularidade integrável quando $\tau \rightarrow \sigma_k^-$, e para idades elevadas o fator e^{-zw} concentra a massa espectral numa vizinhança estreita imediatamente abaixo de cada σ_k . Integrar diretamente na variável τ , sobre células de largura logarítmica fixa, perde essa massa: em ensaio com quatro unidades por década e $z = 91$ d o erro assim cometido chegou a -74% , o que se poderia confundir com falha da representação. A quadratura deve ser feita na variável w , onde a massa e a singularidade são explícitas, e a substituição $w = v^2$ elimina a singularidade exatamente para $m = 1/2$.

13.4.3 Procedimento completo

Reunindo os quatro termos, a regressão da família de curvas é dispensável:

parcela	tratamento
q_1	elástica, independente da idade; $E = 1/q_1$ constante na equação constitutiva
q_3	núcleo não envelhecido; amplitudes $q_3 g_i$, constantes em z
q_4	espectro exato $q_4 e^{-z/\tau}$; amplitudes fechadas $q_4 \ln X e^{-z/\tau_i}$
q_2	espectro exato da fórmula acima; amplitudes por quadratura em w

As três cadeias reúnem-se por concatenação, uma vez que a soma de cadeias de Kelvin é uma cadeia de Kelvin e a formulação das Seções 4 a 7 não distingue a origem de cada unidade — apenas o número de variáveis internas aumenta. Registre-se a consequência do primeiro item: no B4 o módulo elástico não envelhece, e o envelhecimento aparente do módulo estático é saída do modelo, recuperada como $E(z) \approx 1/J(z + \Delta, z)$. Manter simultaneamente uma lei $E(z)$ independente, importada da caracterização térmica, contabiliza duas vezes o mesmo envelhecimento.

A implementação usada neste trabalho monta a cadeia com quatro unidades por década de 10^{-4} a 10^7 dias, o que resulta em $N = 45$ unidades após compressão do espectro. O erro relativo contra o previsor fica em $0,19\%$ no máximo e $0,03\%$ na média, e cai sob refino do espaçamento — comportamento característico de erro de quadratura, e não de erro de representação.

13.5 A via por regressão e seu alcance

Quando o previsor não admite representação fechada, ou quando o insumo são dados de ensaio, resta a regressão. Ela é legítima, mas o seu alcance precisa ser declarado, e é menor do que se costuma supor.

A tabela abaixo compara, para o mesmo material B4, o erro relativo máximo da cadeia contra o previsor, em função da idade de carregamento, pelas duas vias. A regressão foi conduzida sobre uma malha de idades de 0,5 a 91 dias.

z (d)	regressão	espectro exato
0,25	38 %	0,3 %
0,5	7 %	0,2 %
1	6 %	0,2 %
7	3 %	0,2 %
28	4 %	0,2 %
91	6 %	0,2 %
180	35 %	0,7 %

Dentro da malha ajustada a regressão fica na faixa de 3 a 7 %; fora dela o erro sobe uma ordem de grandeza. O comportamento é o esperado de uma extrapolação, e não é corrigível por aumento do número de unidades, pela razão dada acima, na parcela viscoelástica. Duas recomendações decorrem daí. A malha de idades do ajuste deve cobrir todas as idades de carregamento que a história térmica vai efetivamente solicitar, o que no concreto massa significa começar em fração de dia. E o resultado deve ser submetido ao diagnóstico de admissibilidade acima, unidade a unidade, antes de alimentar o cálculo de tensões.

O ajuste por regressão da família de curvas com envelhecimento permanece, no estado atual deste trabalho, a parte menos satisfatória do procedimento, e está em revisão. A via exata, quando aplicável, deve ser preferida.

-
1. Adota-se $[\mathbb{V}]$ sempre que se trabalhar em forma matricial (vetores coluna de Voigt) e $\mathbb{V}$ quando se enfatizar a forma tensorial. O operador físico é o mesmo, porém **a representação matricial de Voigt e o tensor de segunda ordem não são o mesmo objeto** nas componentes de cisalhamento — distinção frequentemente omitida e que, se ignorada, corrompe deformações direcionais e a montagem da roseta (Jirásek e Bažant, 2002).

Na convenção de Voigt *de engenharia* adotada neste artigo, os vetores-coluna leem-se

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T,$$

com a deformação de engenharia $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$), enquanto o tensor simétrico ε guarda as componentes tensoriais ε_{ij} . Daí o fator $2(1 + \nu)$ na diagonal de cisalhamento de $[\mathbb{V}]$: ele é coerente com $\{\varepsilon\} = D[\mathbb{V}]\{\sigma\}$ em Voigt, e *não* autoriza tratar as três últimas entradas de $\{\varepsilon\}$ como se fossem $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ numa operação tensorial.

Em particular, a deformação na direção unitária $\hat{n}$ é sempre a forma quadrática *tensorial*

$$\varepsilon_n = \hat{n} \cdot \varepsilon \cdot \hat{n} = n_i \varepsilon_{ij} n_j,$$

ou, expandida,

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{zx} n_z n_x$$

(com $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$). Se se montar um “tensor” colocando γ_{xy} no lugar de ε_{xy} e ainda assim aplicar $\hat{n} \cdot \varepsilon \cdot \hat{n}$ como se as entradas fossem tensoriais, o cisalhamento entra em dobro e a deformação direcional — e, por consequência, o tensor recuperado da roseta — resultam errados. A regra prática é, portanto: (i) algoritmo constitutivo incremental em Voigt, com $[\mathbb{V}]$ acima; (ii) projeções

direcionais, autovalores e montagem/inversão da roseta no tensor ε_{ij} , convertendo $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}/2$ na ida e $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ na volta. ↩